誘導堤に拘束された雪崩の運動方程式

著者	納口 恭明
雑誌名	国立防災科学技術センター 研究報告
巻	39
ページ	153-162
発行年	1987-03
URL	http://doi.org/10.24732/nied.00000954

国立防災科学技術センター研究報告　第39号　1987年3月

624.144

誘導堤に拘束された雪崩の運動方程式

納口恭明*

国立防災科学技術センター雪害研究所

Equation for Avalanche Motion Restricted by a Diversion Barrier

By

Yasuaki Nohguchi

Institute of Snow and Ice Studies, National Research Center for Disaster Prevention, Nagaoka, Niigata-ken, 940

Abstract

Equation for an avalanche moving along a diversion barrier were obtained by using analytical mechanics. The avalanche which moves along such a barrier is under the restraint of both the ground surface and the diversion barrier. The force acting on the diversion barrier during the avalanche motion was also obtained from the conditions of the restriction.

1．まえがき

誘導堤は，雪崩の走路上にある家屋や施設を雪崩から守るために設置される防護施設の一種である．その考えの基本は，誘導堤により雪崩の走路を変えて安全な対向に導こうというものである(図1)．この意味で，誘導堤は雪崩の運動に対してひとつの拘束条件を課すものである．

納口(1983)は任意の地形上の雪崩の運動を3次元空間中の曲面上に拘束されたひとかたまりの物体の運動として方程式を導出した．これは，地形面をひとつの拘束条件とするもので，解析力学により求めることができる．このとき方程式はこの拘束条件のため自由度は2となり，水平面上に固定された座標x，yによって記述される．

*第1研究室

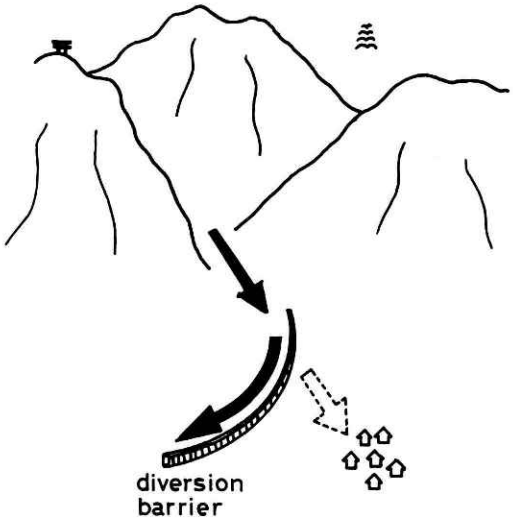


図1　誘導堤
Fig. 1　Schema of diversion barrier

いいかえると，この方程式は水平面に射影された運動を記述しており，地形図のみを用いて解析するうえで非常に便利である．

本報告では，これにさらに誘導堤という拘束条件が加わった場合の方程式を前報(納口，1983)と同様に解析力学を用いて導出する．また，誘導堤に加わる力を拘束力という立場から求める．

2．3次元空間の運動と拘束条件

雪崩はひとかたまり(質量mの質点)として扱い，その座標をx，y，zとする(xy面は水平面，zは鉛直上向き)．また雪崩に作用する力は重力と運動に対する抵抗力とする．ただし抵抗力は大きさがRで向きは運動方向に逆向きとする．Rが具体的にどのような形で表わされるかは，いまは問題としない．これは雪崩のモデルによって任意に与えることができるようにしておく．

3次元空間中で何ら拘束条件がない場合(図2 **A**)，運動方程式はつぎのとおりである．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{m}\frac{\dot{x}}{V}\\
&\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{m}\frac{\dot{y}}{V}\\
&\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{R}{m}\frac{\dot{z}}{V}\\
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

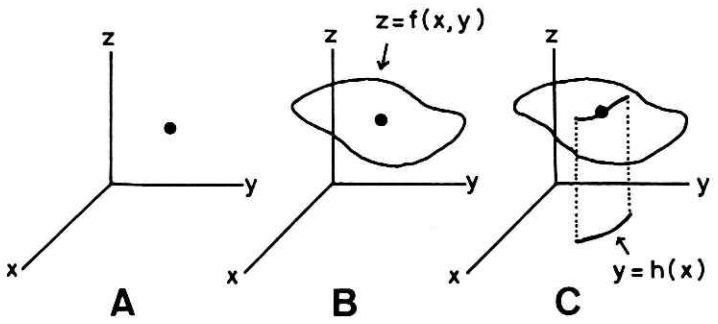


図2　拘束運動(A：無拘束，B：曲面拘束，C：曲線拘束)

Fig. 2　Three-dimensional motions under restraint

ただしgは重力加速度，Vは速度の大きさを表わす．

実際の雪崩でいえば，これは何らかの原因でジャンプして空中を飛行している状態での運動方程式である．この場合は自由度は3である．

地形面上に拘束されている場合(図2**B**)，拘束条件として地形面の方程式

$$z = f(x,\ y) \tag{2}$$

が加わるため自由度は2となり方程式はつぎのとおりである(納口，1983)．

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{f_x}{1+f_x^2+f_y^2}g' - \frac{R}{m}\frac{\dot{x}}{V} \\ \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{f_y}{1+f_x^2+f_y^2}g' - \frac{R}{m}\frac{\dot{y}}{V} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \dot{x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ただし

$$g' = g + f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2 \tag{4}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x},\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y},\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{5}$$

である．

このとき拘束条件にともなう拘束力，すなわち地形面からの垂直抗力は

$$\left.\begin{aligned} N_x &= -\frac{mf_x}{1+f_x^2+f_y^2}g' \\ N_y &= -\frac{mf_y}{1+f_x^2+f_y^2}g' \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$N_z = \frac{m}{1+f_x^2+f_y^2} g'$$

で，大きさNは

$$N = \sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2} = \frac{m}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} g' \tag{7}$$

である．とくにg'が負のときは地形面を離れてジャンプすることになる．

実際の雪崩では(3)式は，$g' \geqq 0$である時は地形面上を滑落する運動を記述することになる．

誘導堤は，3次元空間でいえば線状の拘束である(図2C)．その水平面への射影は

$$y = h(x) \tag{8}$$

のような形で表わすことができる．したがって誘導堤に沿う運動の拘束条件は(2)式と(8)式となる．すなわち

$$z = f(x, y)$$

かつ

$$y = h(x)$$

である．このため運動の自由度は1となる．

3．誘導堤に沿う運動方程式の導出

(2)式と(8)式の拘束条件による運動方程式を解析力学を用いて導出する．

x，y，zのうちxを独立な成分とするラグランジュの方程式はつぎのようになる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = R_1 \tag{9}$$

ラグランジアンLは運動エネルギー

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$= \frac{m}{2}\{\dot{x}^2+(h_x\dot{x})^2+(f_x+f_yh_x)^2\dot{x}^2\} \tag{10}$$

とポテンシャルエネルギー

$$U = mgf\{x, h(x)\} \tag{11}$$

とによって

$$L=K-U \tag{12}$$

と表わされる．ただし

$$h_x=\frac{\partial h}{\partial x} \tag{13}$$

である．

一方，R_1は抵抗力のx，y，z成分R_x，R_y，R_zと

$$R_1=R_x+R_y\frac{\partial y}{\partial x}+R_z\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=R_x+R_yh_x+R_z(f_x+f_yh_x) \tag{14}$$

という関係をもつ．

R_x，R_y，R_zは抵抗力の大きさRと速度の大きさVとによって

$$(R_y\ R_y\ R_z)=-\frac{R}{V}\dot{x}\,(1\quad h_x\quad f_x+f_yh_x) \tag{15}$$

と表わされるのでこれを(14)式に代入すると

$$R_1=-\frac{R}{V}\dot{x}\ \{1+h_x^2+(f_x+f_yh_x)^2\} \tag{16}$$

となる．

(10)，(11)，(12)，(16)式を(9)式に代入して整理するとつぎのような運動方程式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}&=\frac{-(f_x+f_yh_x)}{1+h_x^2+(f_x+f_yh_x)^2}g''-\frac{R}{m}\frac{\dot{x}}{V}\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=\dot{x}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ただし

$$g''=g+\frac{h_x}{f_x+f_yh_x}h_{xx}\dot{x}^2+(f_{xx}+2h_xf_{xy}+h_x^2f_{yy}+h_{xx}f_y)\dot{x}^2 \tag{18}$$

$$h_{xx}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{19}$$

である．

y・z方向の運動成分は拘束条件(2)式と(8)式とから従属的に与えられる．

つぎに，このふたつの拘束条件による拘束力を求める．この場合，拘束力のx，y，z成

分をそれぞれ$\hat{N}_x$, $\hat{N}_y$, $\hat{N}_z$とすると，形式上の運動方程式はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\dot{x}}{dt}&=\frac{\hat{N}_x}{m}-\frac{R}{m}\frac{\dot{x}}{V}\\ \frac{d\dot{y}}{dt}&=\frac{\hat{N}_y}{m}-\frac{R}{m}\frac{\dot{y}}{V}\\ \frac{d\dot{z}}{dt}&=-g+\frac{\hat{N}_z}{m}-\frac{R}{m}\frac{\dot{z}}{V}\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

これを(2)式，(8)式を考慮して(17)式と比較することにより拘束力が求められる．

$$\left.\begin{aligned}\hat{N}_x&=-\frac{m(f_x+f_yh_x)}{1+h_x^2+(f_x+f_yh_x)^2}g''\\ \hat{N}_y&=mh_{xx}\dot{x}^2-\frac{mh_x(f_x+f_yh_x)}{1+h_x^2+(f_x+f_yh_x)^2}g''\\ \hat{N}_z&=mg+m(f_{xx}+2h_xf_{xy}+h_x^2f_{yy}+h_{xx}f_y)\dot{x}^2\\ &\quad-\frac{m(f_x+f_yh_x)^2}{1+h_x^2+(f_x+f_yh_x)^2}g''\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

ところでこの拘束力は実際は地面から受けるものと誘導堤から受けるものとからなっている(図3)．とくに誘導堤から受ける力，逆にいうと雪崩が誘導堤におよぼす力を出すためには，($\hat{N}_x$, $\hat{N}_y$　$\hat{N}_z$)から，(6)式で与えられる地面からの拘束力(N_x　N_y　N_z)を取り去らねばならない．

すなわち誘導堤による拘束力(n_x　n_y　n_z)は

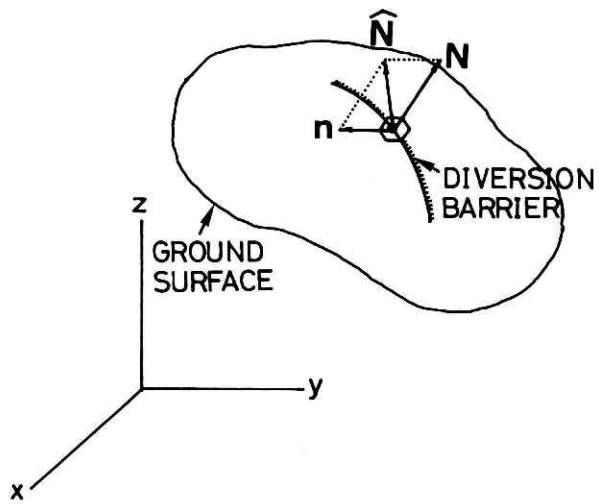


図3　拘束力($\hat{\mathbf{N}}$：拘束力，**N**：地面からの拘束力，**n**：誘導堤からの拘束力)

Fig. 3　Restricting force

$$(n_x \ n_y \ n_z) = (\hat{N}_x - N_x \ \hat{N}_y - N_y \ \hat{N}_z - N_z) \tag{22}$$

で表わされることになる．

ここでいう拘束力$(n_x \quad n_y \quad n_z)$は雪崩が誘導堤を押す力の反作用である．したがって，誘導堤に加わる力はこれにマイナスをつけた$(-n_x \quad -n_y \quad -n_z)$である．

4．直線状の誘導堤の場合

誘導堤の水平面射影が直線となる場合を考える．このとき適当に座標系をとることにより

$$h(x) = c \tag{23}$$

とすることができる（cは定数）．この場合，運動方程式はつぎのとおりとなる．

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} &= \frac{-f_x}{1+f_x^2}(g + f_{xx}\dot{x}^2) - \frac{R}{m}\frac{\dot{x}}{V} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \dot{x} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

また拘束力は

$$\left.\begin{aligned} \hat{N}_x &= \frac{-mf_x}{1+f_x^2}(g + f_{xx}\dot{x}^2) \\ \hat{N}_y &= 0 \\ \hat{N}_z &= mg + mf_{xx}\dot{x}^2 - \frac{mf_x^2}{1+f_x^2}(g + f_{xx}\dot{x}^2) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

となる．したがって誘導堤からの拘束力は

$$\left.\begin{aligned} n_x &= -mf_x(g + f_{xx}\dot{x}^2)\left(\frac{1}{1+f_x^2} - \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2}\right) \\ n_y &= mf_y(g + f_{xx}\dot{x}^2)\frac{1}{1+f_x^2+f_y^2} \\ n_z &= mg + mf_{xx}\dot{x}^2 - m(g + f_{xx}\dot{x}^2)\left(\frac{f_x^2}{1+f_x^2} + \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

となる．

とくに地形に曲率がなく，傾きがx方向のみの場合，すなわち$f_{xx}=0$，$f_y=0$のとき

$$n_x = n_y = n_z = 0 \tag{27}$$

となり自明な結果となる．また同様に曲率がなく傾きがy方向のみの場合は

$$\left.\begin{aligned} n_x &= 0 \\ n_y &= \frac{mf_y}{1+f_y^2}g \\ n_z &= \frac{mf_y^2}{1+f_y^2}g \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

となる．すなわち，雪崩の質量の斜面方向の成分を誘導堤が支えていることを表わす．当然ながら，斜面に垂直方向の成分は地面が支えている．

5．一定斜面上の誘導堤の場合

地形面が一定の傾斜をもつ平面の場合を考える．このとき適当に座標系をとることにより

$$f(x,\ y)=cx \tag{29}$$

とすることができる（c は地形面の傾きで定数）．この場合，運動方程式はつぎのとおりとなる．

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{c}{1+c^2+h_x^2}\left(g+\frac{h_xh_{xx}}{c}\dot{x}^2\right)-\frac{R}{m}\frac{\dot{x}}{V} \\ \frac{dx}{dt} &= \dot{x} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

また拘束力は

$$\left.\begin{aligned} \hat{N}_x &= -\frac{mc}{1+c^2+h_x^2}\left(g+\frac{h_xh_{xx}}{c}\dot{x}^2\right) \\ \hat{N}_y &= mh_{xx}\dot{x}^2-\frac{mch_x}{1+c^2+h_x^2}\left(g+\frac{h_xh_{xx}}{c}\dot{x}^2\right) \\ \hat{N}_z &= mg-\frac{mc^2}{1+c^2+h_x^2}\left(g+\frac{h_xh_{xx}}{c}\dot{x}^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

となる．したがって誘導堤からの拘束力は

$$\left.\begin{aligned} n_x &= -\frac{mc}{1+c^2+h_x^2}\left(g+\frac{h_xh_{xx}}{c}\dot{x}^2\right)+\frac{mcg}{1+c^2} \\ n_y &= mh_{xx}\dot{x}^2-\frac{mch_x}{1+c^2+h_x^2}\left(g+\frac{h_xh_{xx}}{c}\dot{x}^2\right) \\ n_z &= mg-\frac{mc^2}{1+c^2+h_x^2}\left(g+\frac{h_xh_{xx}}{c}\dot{x}^2\right)-\frac{mg}{1+c^2} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

となる．

とくに平地の場合，すなわち $c = 0$ の場合，(32)式はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} n_x &= -\frac{mh_x h_{xx}}{1+h_x^2}\,\dot{x}^2 \\ n_y &= \frac{mh_{xx}}{1+h_x^2}\,\dot{x}^2 \\ n_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

6．誘導堤のある地形上での運動

一般の雪崩の運動は，これまで述べた3つの運動方程式のいずれかで表現される．すなわち，地形面上にある場合は(3)式によって，ジャンプして空中にある場合は(1)式によって，誘導堤に導びかれている場合は(17)式によってそれぞれ記述される．

ところで，斜面上にあったのがジャンプする場合(図4 **a**)や誘導堤に沿っていたのがふつうの自然斜面上に出る場合(図4 **d**)のように，自由度が増加する方へ変わる場合は，速度は連続的にとることができる．しかし逆の場合，すなわちジャンプして空中にあったのが再び地面に着地する場合(図4 **b**)，あるいは自然斜面上を流下していたのが誘導堤に突入する場合(図4 **c**)は，自由度の減少にともなう衝突を考慮しなければならない．すなわち，速度の連続性は一般には保たれず，またエネルギーの散逸も考慮しなければならない．この部分の解決は，実験・観測などとの対応による雪崩内部の運動のモデル化と関係しており，本報告では

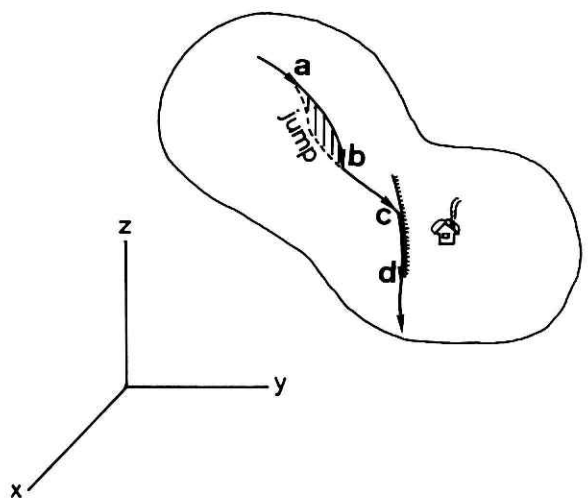


図4　運動の連続性
Fig. 4　Continuity of motion

このモデル的なものについてはとくに触れないことにする．

誘導堤の場合は雪崩の勢いを弱めたり，止めたりするのが目的というよりも，むしろ誘導堤にかかる衝撃力を小さくし，滑らかに走路を変えて安全を確保しようというのが理想である．したがって，誘導堤への突入の際には速度が連続するように，あるいは近似的に連続とみなせるように設計するのが普通である．このためには，誘導堤に突入する直前の運動走路の計算と誘導堤にかかる力の計算が必要である．

7．あとがき

ここで導出した方程式はいずれも多くの項からなり，一見すると繁雑である．また解析力学的に求めたために，容易に直感と結びつかないかもしれない．しかし，運動はすべて水平面上(いいかえると地形図上)に固定された唯一の座標で記述されているため，一枚の地形図だけで，何らそれを変換することなく，計算をおこなうことができる．したがって，たとえば地形面の微小単位ごとに座標系を与えて考えるのと比べると数値計算上は著しく簡単である．

これらの方程式を使ううえで必要となる地形の読みとりをまとめておくとつぎのとおりである．自然斜面上の運動では地形の一次微分f_x, f_yと二次微分f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}の合計5個である．また誘導堤上では，その5個のほかにさらに誘導堤の水平射影$y = h(x)$の一次微分と二次微分h_x，h_{xx}の2個が加わり7個の読みとりが必要となる．

13名の犠牲者を出した能生町柵口の雪崩(1986年1月26日発生)の後，中心的な役割をする防護施設として大規模な誘導堤がつくられており，ここで述べたような方程式を用いた解析も今後，重要となるであろう．

参考文献

1）納口恭明(1983)：モデル地形における雪崩の運動走路．国立防災科学技術センター研究報告，第31号，153-174.

(1986年11月29日　原稿受理)