新しく考案したボアホール式3成分ひずみ計

著者	坂田 正治
雑誌名	国立防災科学技術センター 研究報告
巻	25
ページ	95-126
発行年	1981-03
URL	http://doi.org/10.24732/nied.00000842

国立防災科学技術センター研究報告　第25号　1981年3月

550.34.038

新しく考案したボアホール式3成分ひずみ計

坂　田　正　治*

国立防災科学技術センター

On the Concepts of Some Newly-invented Borehole Three-component Strainmeters

By

Shoji Sakata

National Research Center for Disaster Prevention, Japan

Abstract

Four types of borehole three-component strainmeters to detect the three components of strain in the earth's crust have been invented. They are :

(a) the elliptic cylinder type,

(b) the diameter-constrained cylinder type,

(c) the rigid partition wall three-divided dual cylinder type, and

(d) the slide partition wall three-divided dual cylinder type.

At first an explanation is given of the process of arriving at the concepts of these strainmeters and the relations between them in order to help intuitive understanding. This is followed by analysis and formulation of deformations of these strainmeters in elastic bodies subjected to tensile stresses at infinity. The constants for an actual case with type (c) are also calculated.

* 第2研究部総合地震予知研究室

1. はじめに

地殻ひずみの時間的変化を連続測定することは，地球物理学上も地震予知の点からも重要である．特に，地震を起す源の力は，地殻内の水平方向の圧縮力であると考えられるので，その結果である水平ひずみの変化には特に着目する必要がある．また大地震の直前にプレスリップが発生するならば，傾斜と並び大きな水平ひずみの変化が期待できる．発震機構の調査から，大地震の発生前に，その近傍における地殻内主応力の方向が，90°も回転する場合があるともいわれている．これらの理由により，二つの主ひずみの値およびそれらの方向という，地殻水平ひずみの3成分の変化を測定することは興味が深い．

今まで，地殻水平ひずみ変化の連続測定には，横坑式の伸縮計や，地表における真空パイプを利用した長距離レーザ干渉計が用いられてきている．これらは，立地および維持の上で種々の制約がある．実用になる地震予知システムを作るためには，とにかく多数の観測点が必要となる．横坑式の水管傾斜計にかわり，コンパクトなボアホール式傾斜計が実用化されたように，ボアホール式3成分ひずみ計が要求される．

一方，気象庁はすでに，ボアホール式である埋込式ひずみ計を実用化し，関東・東海地域において多数点で観測を行っている（たとえば末広，1979）．このひずみ計は，ひずみゲージを利用した孔径変化測定方式のひずみ計に比べ，（1） 感度が高く，しかも作動範囲が大きい．（2） 容器全体の体積変化を検出するということは，孔径変化をzおよびθについて積分したことになり，不均一物体に対しては，信頼性の高い値を示す，等のすぐれた点があるが，そもそも体積ひずみ変化（2次元とした場合は，主ひずみの和）しか検出できない．

そこで，私は，この埋込式ひずみ計の長所は生かしつつも，水平ひずみの3成分変化を検出できるボアホール式3成分ひずみ計が作れないかと考えてみた．その結果，4種類の型式のものについてそれぞれの理論的な基礎を得ることができたので発表する．

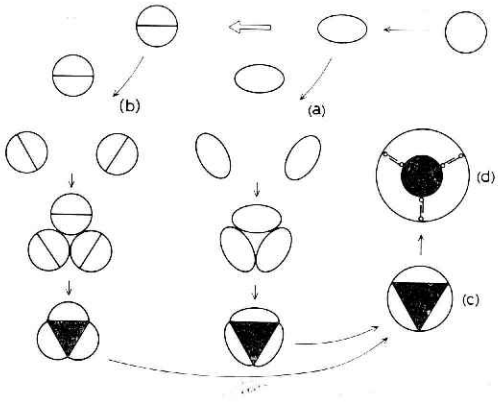


図 1　4型式の3成分ひずみ計と相互の関連．
Fig. 1　Schematic illustrations of the four types of three-component borehole strainmeters and relations between them :
（a） elliptic cylinder type,
（b） diameter-constrained cylinder type,
（c） rigid partition wall three-divided dual cylinder type, and
（d） slide partition wall three-divided dual cylinder type.

2. 4型式の3成分ひずみ計の断面の形と相互の関連

図1は，4型式の3成分ひずみ計の断面の形と相互の関連を，直観的にわかるようにあらわしたものである．

まず，右側最上段の円形は，気象庁の埋込式ひずみ計の断面をあらわす．この円の面積変化は，この円孔から離れた部分に働く主応力の和に比例し，その方向には依らない．そこで，円筒のかわりに偏平断面を持った筒を利用すれば，断面積の変化は，主応力の向きによって変化するであろうから，3本以上を，方向を違えて埋込むことにより，それらの観測結果（それぞれの断面積変化）を利用して，水平ひずみの3成分変化が計算で求められると予想できる．偏平断面として，まずだ円が考えられる．だ円は，数学的にはきれいな計算にのるが，実際にだ円筒を製作するのは容易ではないので，図1左側にあるような形のものを考える．円筒のある直径方向に，抵抗になる壁を入れると，この直径方向には変形しにくくなり，逆にこれと直角方向には一番変形しやすくなる．従って，この形は結果的に，だ円と同等のものになると考えられる．これらだ円，または直径が拘束された円を断面としてもつ筒を3本組合せることにより，3成分ひずみ計は構成される．この3本の筒相互の距離を小さくして行き，ついには1本にまとめてしまうことにより，最終的には，図1右側にあるような3分割二重円筒（2種類ある）に変化させ得ることが，図1から直観的に理解できるであろう．ここにあげた4種の断面を持つ3成分ひずみ計を

（a） だ円筒型ボアホール式3成分ひずみ計
（b） 直径拘束円筒型　〃
（c） 剛隔壁3分割二重円筒型　〃
（d） スライド隔壁3分割二重円筒型　〃

のように名付ける．

以下のセクションにおいて，これらの基礎となる式を導こう．最初は，4者の共通となる弾性論の式を導き，次に，これらの理論式を活用し，各型のひずみ計の原理についてのべる．なお，以下において，問題はすべて平面ひずみ問題として取扱う．また，応力は，引っ張りを正としている．

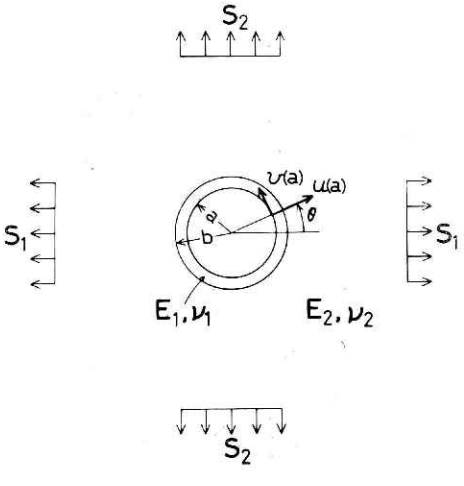


図 2 無限遠で引張り応力を受ける弾性体中の円管

Fig. 2 A cylinder in an elastic body subjected to tensile stresses S_1 and S_2 at infinity.

3. 基本となる式の誘導

3.1 無限遠で応力を受ける弾性体中の円管の変形

図2のように，弾性定数が E_2，ν_2 の無限弾性体中に，内半径が a，外半径が b である円管（弾性定数は E_1，ν_1）がおさまっているとする．この弾性体の無限遠に，S_1 および S_2 の引張り応力を与えるとき，この円管の内壁の変位を求めてみよう．

まず，図2の無限遠における応力場を，$(r,\ \theta)$ 座標を用いることにより，二つの応力場に分解する．すなわち，$r\to\infty$ において，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=S_1\cos^2\theta+S_2\sin^2\theta=\frac{S_1+S_2}{2}+\frac{S_1-S_2}{2}\cos 2\theta\\ \sigma_\theta&=S_1\sin^2\theta+S_2\cos^2\theta=\frac{S_1+S_2}{2}-\frac{S_1-S_2}{2}\cos 2\theta\\ \tau_{r\theta}&=-(S_1-S_2)\sin\theta\cos\theta=0-\frac{S_1-S_2}{2}\sin 2\theta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

となる．上式右辺の各第1項は，主応力の和に比例する等方（軸対称）引張りの応力場をあらわし，同じく各第2項は，差応力に比例する純粋せん断の応力場をあらわしている．以下，それぞれの応力場における円管の変形について求める．

（a） 等方引張りの応力場における円管の変形

この場合の応力と変形は，一般に，

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{A}{r^2}+2B,\quad \sigma_\theta=-\frac{A}{r^2}+2B,\quad \tau_{r\theta}=0\\ &u=\frac{1}{E}\left\{-\frac{1+\nu}{r}A+2B(1-\nu-2\nu^2)r\right\},\quad v=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

であらわされる．以下，A，B および E，ν に添字1あるいは2をつけることによって，考えている点が円管内にあるか，あるいは外側の無限弾性体中にあるかを示すこととする．

まず，$r\to\infty$ での応力条件を考えると，

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\frac{S_1+S_2}{2}\quad\cdots\cdots(3)$$

であるから，(2)式より，

$$2B_2=\frac{S_1+S_2}{2}\ \rightarrow\ B_2=\frac{S_1+S_2}{4}\quad\cdots\cdots(4)$$

が求められる．次に，$r=b$ での応力，変位の連続条件から，(2)式を利用して，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A_2}{b^2}+2B_2=\frac{A_1}{b^2}+2B_1\\ &\frac{1}{E_2}\left\{-\frac{1+\nu_2}{b}A_2+2B_2(1-\nu_2-2\nu_2^2)b\right\}\\ &\quad=\frac{1}{E_1}\left\{-\frac{1+\nu_1}{b}A_1+2B_1(1-\nu_1-2\nu_1^2)b\right\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

が成立する．また，$r=a$ での応力条件から，

$$\frac{A_1}{a^2}+2B_1=0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

が成立する．連立方程式(4)，(5)および(6)を解くことにより，

$$\left.\begin{aligned} A_1&=-\frac{(1-\nu_2)\alpha a^2(S_1+S_2)}{\{(1-\alpha)(a/b)^2+1-2\nu_1+\alpha\}}\\ B_1&=\frac{(1-\nu_2)\alpha(S_1+S_2)}{2\{(1-\alpha)(a/b)^2+1-2\nu_1+\alpha\}}\\ A_2&=\frac{\{(1-\nu_2)\alpha(1-a^2/b^2)-1/2\}b^2(S_1+S_2)}{\{(1-\alpha)(a/b)^2+1-2\nu_1+\alpha\}} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ただし，　$\alpha=\dfrac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)}$

と求められる．従って，円管内壁の半径方向の変位は，(2)の第4式に，(7)の A_1，B_1 を代入し，$r=a$ とおくことにより，

$$u(a)=\frac{1+\nu_2^2}{E_2}\,\frac{2(1-\nu_1)}{\{(1-\alpha)(a/b)^2+1-2\nu_1+\alpha\}}\,a(S_1+S_2) \qquad \cdots\cdots(8)$$

と求められる．この式は，すでに古屋 (1978) が求めたものと同じである．一方，円管が存在せず，半径 a の円孔のすぐ外側から弾性定数が E_2，ν_2 になっているとき，円孔内壁の変位は，(8)式で，$\alpha=1$ とおくことにより，

$$u_n(a)=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a(S_1+S_2) \qquad \cdots\cdots(9)$$

と求まる．円管のない場合の円孔内壁の変位に対する円管のある場合の変位の割合を f とすると，(8)式を(9)式で割ることにより，

$$f=\frac{u(a)}{u_n(a)}=\frac{2(1-\nu_1)}{\{(1-\alpha)(a/b)^2+1+2\nu_1+\alpha\}} \qquad \cdots\cdots(10)$$

と得られる．いま，$\nu_1=\nu_2=0.25$ と仮定し，a/b と f との関係を，パラメータ E_1/E_2 の値ごとに示したのが，図3である．

(b)　純粋せん断の応力場における円管の変形

(1)式の右辺各第項であらわされるような，純粋せん断の応力場に適当な応力関数は，

$$\phi=\left(Ar^2+Br^4+\frac{C}{r^2}+D\right)\cos 2\theta \qquad \cdots\cdots(11)$$

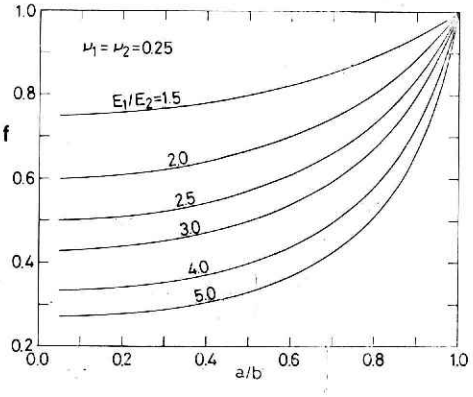


図 3　f と内外半径比の関係
Fig. 3　Coefficient f versus a/b; f is defined in Eq. (10) and used in Eq. (23).

で与えられ，また，

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2},\quad \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \qquad \cdots\cdots(12)$$

であるから，(11)式を(12)の各式に代入することにより，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-\left(2A+\frac{6C}{r^4}+\frac{4D}{r^2}\right)\cos 2\theta\\ \sigma_\theta&=\left(2A+12Br^2+\frac{6C}{r^4}\right)\cos 2\theta\\ \tau_{r\theta}&=\left(2A+6Br^2-\frac{6C}{r^4}-\frac{2D}{r^2}\right)\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(13)$$

とあらわされる．ところで，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\sigma_r-\nu(1+\nu)\sigma_\theta\right\}\\ \varepsilon_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r}=\frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\sigma_\theta-\nu(1+\nu)\sigma_r\right\}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

であるから，(13)式の σ_r，σ_θ を(14)式に代入し，r あるいは θ について積分することにより，結局，

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1+\nu}{E}\left\{-2Ar-4\nu Br^3+\frac{2C}{r^3}+\frac{4(1-\nu)D}{r}\right\}\cos 2\theta\\ v&=\frac{1+\nu}{E}\left\{2Ar+2(3-2\nu)Br^3+\frac{2C}{r^3}-\frac{2(1-2\nu)D}{r}\right\}\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(15)$$

が得られる．(13)および(15)式において，(2)式の場合と同じように，添字1または2により，考えている点が円管部分にあるか外側にあるかを示すこととする．

次に，境界条件を考えてみよう．まず，$r=a$ での応力条件から

$$\left.\begin{aligned}&2A_1+\frac{6C_1}{a^4}+\frac{4D_1}{a^2}=0\\ &2A_1+6B_1a^2-\frac{6C_1}{a^4}-\frac{2D_1}{a^2}=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(16)$$

が得られる．次に，$r=b$ での応力，変位連続条件から

$$\left.\begin{aligned}&2A_1+\frac{6C_1}{b^4}+\frac{4D_1}{b^2}=2A_2+\frac{6C_2}{b^4}+\frac{4D_2}{b^2}\\ &2A_1+6B_1b^2-\frac{6C_1}{b^4}-\frac{2D_1}{b^2}=2A_2+6B_2b^2-\frac{6C_2}{b^4}-\frac{2D_2}{b^2}\\ &\frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{-2A_1b-4\nu_1B_1b^3+\frac{2C_1}{b^3}+\frac{4(1-\nu)D_1}{b}\right\}\\ &\quad=\frac{1+\nu_2}{E_2}\left\{-2A_2b-4\nu_2B_2b^3+\frac{4(1-\nu_2)D_2}{b}\right\}\\ &\frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{2A_1b+2(3-2\nu_1)B_1b^3+\frac{2C_1}{b^3}-\frac{2(1-2\nu_1)D_1}{b}\right\}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(17)$$

$$=\frac{1+\nu_2}{E_2}\left\{2A_2b+2(3-2\nu_2)B_2b^3+\frac{2C_2}{b^3}-\frac{2(1-2\nu_2)D_2}{b}\right\}$$

が得られる．次に，無限遠での応力条件から

$$-2A_2=\frac{S_1-S_2}{2},\qquad B_2=0 \qquad \cdots\cdots(18)$$

が得られる．

次に，連立方程式(16)，(17)および(18)を解くことにより，$A_1\sim D_1$ および $A_2\sim D_2$ を求める．このようにして求めた各未知数の値を(15)式に代入し，かつ $r=a$ とおけば，円管内壁の半径方向および円周方向の変位が求められる．すなわち，

$$\left.\begin{aligned}u(a)&=\frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{-2A_1a-4\nu_1B_1a^3+\frac{2C_1}{a^3}+\frac{4(1-\nu_1)D_1}{a}\right\}\cos 2\theta\\ v(a)&=\frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{2A_1a+2(3-2\nu_1)B_1a^3+\frac{2C_1}{a^3}-\frac{2(1-2\nu_1)D_1}{a}\right\}\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(19)$$

となる．一方，円管がないときは，$E_1=E_2$，$\nu_1=\nu_2$ を今までの式に代入することから，

$$\left.\begin{aligned}&A_1=A_2=-\frac{S_1-S_2}{4},\quad B_1=B_2=0\\ &C_1=C_2=-\frac{a^4(S_1-S_2)}{4},\quad D_1=D_2=\frac{a^2(S_1-S_2)}{2}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(20)$$

が求められ，これらを(19)式に代入することにより，円孔内壁の変位 $u_n(a)$，$v_n(a)$ は，

$$\left.\begin{aligned}u_n(a)&=\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}a(S_1-S_2)\cos 2\theta\\ v_n(a)&=-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}a(S_1-S_2)\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(21)$$

となる．円管のない場合の円孔の内壁を各位に対する，円管のある場合の各変位の割合を，それぞれ g，h とすると，これらは，(19)および(21)式から，

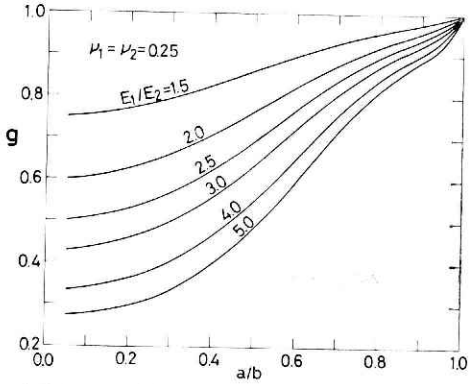


図 4 g と内外半径比の関係

Fig. 4 Coefficient g versus a/b; g is defined in Eq. (22) and used in Eq. (23).

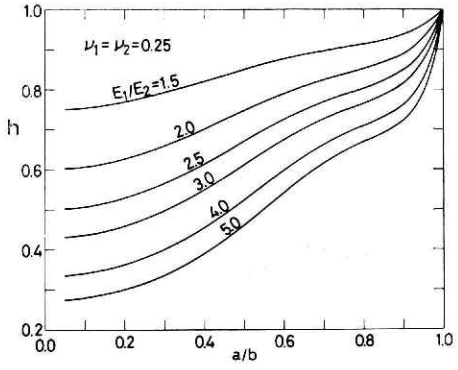


図 5 h と内外半径比の関係．

Fig. 5 Coefficient h versus a/b; h is defined in Eq. (22) and used in Eq. (23).

$$g=\frac{u(a)}{u_n(a)}=\frac{1}{\alpha(1-\nu_2)}\left\{-A_1-2\nu_1B_1a^2+\frac{C_1}{a^4}+\frac{2(1-\nu_1)D_1}{a^2}\right\}\frac{1}{(S_1-S_2)}$$

$$h=\frac{v(a)}{v_n(a)}=\frac{1}{\alpha(1-\nu_2)}\left\{-A_1-(3-2\nu_1)B_1a_2-\frac{C_1}{a^4}+\frac{(1-2\nu_1)D_1}{a^2}\right\}\frac{1}{(S_1-S_2)} \quad \cdots\cdots(22)$$

と求められる．図4，5は，$\nu_1=\nu_2=0.25$ と仮定したときの，a/b と g，h の関係を，パラメータ E_1/E_2 の値ごとに示したものである．

（c）　全体としての円管の変形

今までの結論と，(10)式の f および(22)式の g，h を用いることにより，2つの応力場が同時に働いているとき，すなわち，無限遠で S_1，S_2 の引張り応力が働くときの円管内壁の変位は，

$$u(a)=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a\{(S_1+S_2)f+2(S_1-S_2)g\cos 2\theta\}$$
$$v(a)=-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}a(S_1-S_2)h\sin 2\theta \quad \cdots\cdots(23)$$

であらわされる．

3.2　線荷重を受ける無限弾性体中の円管の変形

（a）　1本の線荷重を受ける場合

図6（a）のように，無限弾性体中にある円管の内壁に，1本の線荷重が働くとき，円管内壁の変位を求めてみよう．以下において，添字の使い方は，前項3.1の場合と同じである．

まず，図6（a）の円管内壁の応力条件をフーリエ級数であらわすと，$r=a$，$\theta\neq 0$ で，

$$\sigma_r=\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos n\theta,\quad \tau_{r\theta}=0$$
$$q_n=-\frac{P}{\pi a};\ n\geqq 0 \quad \cdots\cdots(24)$$

となる．

次に，(24)式を考慮に入れ，たとえば Timoshenko and Goodier (1970) を参考にすることにより，応力関数は，

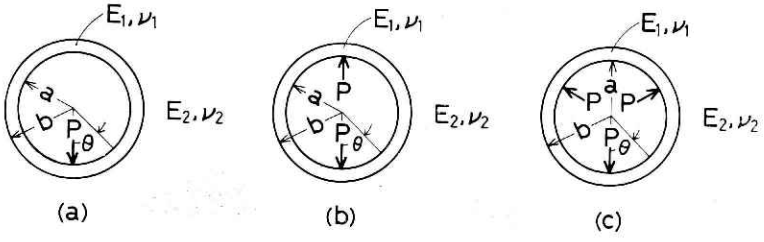


図 6　線荷重を受ける無限弾性体中の円管．

Fig. 6　Cylinders in infinite elastic bodies, on which radial line forces are acting.

$$
\begin{aligned}
&\phi=\phi_0+\phi_1+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n\\
&\phi_0=a^2\left\{A_0\left(\frac{r}{a}\right)^2+B_0\log\left(\frac{r}{a}\right)\right\}\frac{q_0}{2}\\
&\phi_1=a^2\left[\frac{A_1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)\theta\sin\theta+\left\{B_1\left(\frac{r}{a}\right)^3+C_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+D_1\left(\frac{r}{a}\right)\log\left(\frac{r}{a}\right)\right\}\cos\theta\right]q_1\\
&\phi_n=a^2\left\{A_n\left(\frac{r}{a}\right)^{n+2}+B_n\left(\frac{r}{a}\right)^{n}+C_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}\right.\\
&\qquad\left.+D_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n+2}\right\}q_n\cos n\theta
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(25)
$$

となる．以下，A_0，B_0，$A_1\sim D_1$ および $A_n\sim D_n$ の右肩に，1または2を添えることにより，考えている点が，円管部分にあるか，外側の物体中にあるかを示すこととする．

この問題を解くため，(25)の ϕ_0，ϕ_1 および ϕ_n を用い，それぞれの次数に対応する応力および変位を求め，後でそれらの和をとることとする．まず，ϕ_0 による応力および変位を求めよう．これは，(24)式からわかるように，円管内部に，$P/(\pi a)$ という静水圧がかかっている状態を示す．(12)式および(14)式を利用し，必要な積分も行うなどして，

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{r,0}=a^2\left(\frac{2A_0}{a^2}+\frac{B_0}{r^2}\right)\frac{q_0}{2},\quad \sigma_{\theta,0}=a^2\left(\frac{2A_0}{a^2}-\frac{B_0}{r^2}\right)\frac{q_0}{2},\quad \tau_{r\theta}=0\\
&u_0=\frac{1+\nu}{E}\left\{2(1-2\nu)\frac{A_0}{a^2}r-\frac{B_0}{r}\right\}a^2\frac{q_0}{2},\quad v_0=0
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(26)
$$

が得られる．次に，境界条件を考えよう．まず，$r=a$ において，

$$
2A_0^1+B_0^1=1 \qquad\cdots\cdots(27)
$$

が成立する．次に，$r=b$ における応力，変位連続条件から，

$$
\begin{aligned}
&2A_0^1+\frac{a^2}{b^2}B_0^1=2A_0^2+\frac{a^2}{b^2}B_0^2\\
&\frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{2(1-2\nu_1)\frac{b}{a^2}A_0^1-\frac{B_0^1}{b}\right\}=\frac{1+\nu_2}{E_2}\left\{2(1-2\nu_2)\frac{b}{a^2}A_0^2-\frac{B_0^2}{b}\right\}
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(28)
$$

が成立する．また，無限遠での応力条件から，

$$
A_0^2=0 \qquad\cdots\cdots(29)
$$

が得られる．連立方程式(27)，(28)，(29)式を解くと，

$$
\begin{aligned}
&A_0^1=\frac{-(\alpha-1)(a/b)^2}{2\{1-2\nu_1+\alpha-(\alpha-1)(a/b)^2\}}\\
&B_0^1=\frac{1-2\nu_1+\alpha}{\{1-2\nu_1+\alpha-(\alpha-1)(a/b)^2\}}\\
&B_0^2=\frac{2(1-\nu_1)}{\{1-2\nu_1+\alpha-(\alpha-1)(a/b)^2\}},\quad \text{ただし } \alpha=\frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)}
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(30)
$$

が得られる．これらを(26)式に代入し，$r=a$ での半径方向の変位 $u_0(a)$ を求めると，

$$u_0(a)=\frac{-\{1-2\nu_1+\alpha+(1-2\nu_1)(\alpha-1)(a/b)^2\}}{\{1-2\nu_1+\alpha-(\alpha-1)(a/b)^2\}}\frac{1+\nu_1}{E_1}a\frac{q_0}{2}$$

$$=\frac{1+\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}\frac{1}{2}j_0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

$$j_0=\frac{1-2\nu_1+\alpha+(1-2\nu_1)(\alpha-1)(a/b)^2}{\alpha\{1-2\nu_1+\alpha-(\alpha-1)(a/b)^2\}}$$

が得られる．上式で，$\alpha=1$ のとき $j_0=1$ となり，このときの $u_0(a)$ は，円管がなく，半径 a の円孔がある場合の内壁の変位を示す．図7は，$\nu_1=\nu_2=0.25$ を仮定したときの j_0 と a/b の関係を，パラメータ E_1/E_2 の値ごとに示したものである．

次に，ϕ_1 による応力および変位を求めてみよう．ϕ_0 のときと同じように，(12)式および(14)式を用い，また必要な積分を行うことにより，

$$\sigma_{r,1}=\left\{(A_1+D_1)\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}+2B_1\left(\frac{r}{a}\right)-2C_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-3}\right\}q_1\cos\theta$$

$$\sigma_{\theta,1}=\left\{6B_1\left(\frac{r}{a}\right)+2C_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-3}+D_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\right\}q_1\cos\theta$$

$$\tau_{r\theta,1}=\left\{2B_1\left(\frac{r}{a}\right)-2C_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-3}+D_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\right\}q_1\sin\theta$$

$$u_1=\left[\{(1-\nu)A_1+(1-2\nu)D_1\}\log\left(\frac{r}{a}\right)+(1-4\nu)B_1\left(\frac{r}{a}\right)^2\right.$$

$$\left.+C_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\right]\frac{1+\nu}{E}q_1a\cos\theta \qquad \cdots\cdots(32)$$

$$v_1=\left[\{-\nu A_1+(1-2\nu)D_1\}-\{(1-\nu)A_1+(1-2\nu)D_1\}\log\left(\frac{r}{a}\right)\right.$$

$$\left.+(5-4\nu)B_1\left(\frac{r}{a}\right)^2+C_1\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\right]\frac{1+\nu}{E}q_1a\sin\theta$$

が得られる．

ところで，後の方で実際に扱う問題においては，単独の集中線荷重ではなく，複数の集中荷重が全体として釣合をなすように働く場合を取扱うことになる．このようなときには，ϕ_1 による応力も変位も全体として打消し合い，最終的

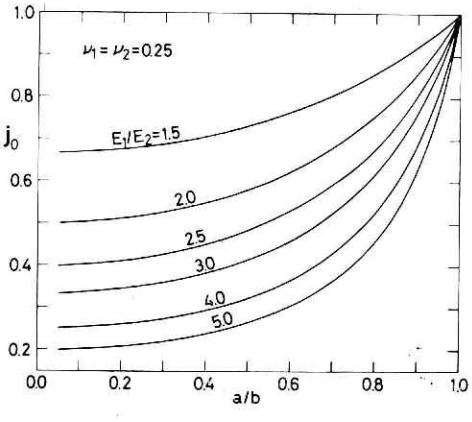


図 7　j_0 と内外半径比の関係．
Fig. 7　Coefficient j_0 versus a/b; j_0 is defined in Eq. (31) and used in Eqs.(49), (50) and (51).

には何の結果も及ぼさない．したがって，ここでは，$A_1^1 \sim D_1^1$ 及び $A_1^2 \sim D_1^2$ の具体的な値を求めることは省略し，(32)式を提出することにとどめる．なお，参考のため，円管がない場合，すなわち $E_1=E_2$, $\nu_1=\nu_2$ の場合について $A_1' \sim D_1'$ を求めておこう．

まず，$r=a$ における応力条件から，

$$\left.\begin{aligned} &A_1'+D_1'+2B_1'-2C_1'=1 \\ &2B_1'-2C_1'+D_1'=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(33)$$

が得られる．次に，$r \to \infty$ における応力条件から，

$$B_1'=0 \quad \cdots\cdots(34)$$

が求められる．(33) と (34) 式だけでは未知数は定まらない．ここで，Timoshenko and Goodier (1970) によれば，

$$D_1'=-\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}A_1' \quad \cdots\cdots(35)$$

という新たな関係式が成り立つ．連立方程式 (33)，(34)，(35) を解くことにより，各未知数が

$$A_1'=1, \quad B_1'=0, \quad C_1'=-\frac{1-2\nu}{8(1-\nu)}, \quad D_1'=-\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \quad \cdots\cdots(36)$$

と求められる．これらの $A_1' \sim D_1'$ の値を (33) の第4式に代入することにより，

$$u_1'=\left\{\frac{3-4\nu_2}{4(1-\nu_2)}\log\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{1-2\nu_2}{8(1-\nu_2)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\right\}\frac{1+\nu_2}{E_2}q_1 a\cos\theta \quad \cdots\cdots(37)$$

なると．$r=a$ とおくことにより，円孔内壁の半径方向の変位は，

$$u_1'(a)=-\frac{1-2\nu_2}{8(1-\nu_2)}\frac{1+\nu_2}{E_2}q_1 a\cos\theta=\frac{1+\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}\frac{1-2\nu_2}{8(1-\nu_2)}\cos\theta \quad \cdots\cdots(38)$$

とあらわされる．また，(32) 式の u_1 に $r=a$ を代入したものと，(38) 式を用いることにより，

$$\left.\begin{aligned} &u_1(a)=\frac{1+\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}\frac{1-2\nu_2}{8(1-\nu_2)}\cos\theta \cdot j_1 \\ &j_1=\frac{u_1(a)}{u_1'(a)}=-\frac{8(1-\nu_2)}{\alpha(1-2\nu_2)}\{(1-4\nu_1)B_1^1+C_1^1\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(39)$$

が得られる．先にのべたように，j_1 の値は求める必要はない．

次に，ϕ_n による応力および変位を求めよう．今までと同じように，(12)式および (14) 式を用い，また必要な積分を行うことにより，

$$\sigma_{r,n}=\left\{A_n(-n^2+n+2)\left(\frac{r}{a}\right)^n+B_n(-n_2+n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right.$$
$$\left.+C_n(-n^2-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-2}+D_n(-n^2-n+2)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}\right\}q_n\cos n\theta$$

$$\sigma_{\theta,n}=\left\{A_n(n^2+3n+2)\left(\frac{r}{a}\right)^n+B_n(n^2-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right.$$

$$+C_n(n^2+n)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-2}+D_n(n^2-3n+2)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}\Big\}q_n\cos n\theta$$

$$\tau_{r\theta,\,n}=\Big\{A_n(n^2+n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n}+B_n(n^2-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}$$

$$+C_n(-n^2-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-2}+D_n(-n^2+n)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}\Big\}q_n\sin n\theta \qquad \cdots\cdots(40)$$

$$u_n=\frac{1+\nu}{E}\Big\{A_n(-n+2-4\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}+B_n(-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}$$

$$+C_n n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1}+D_n(n+2-4\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n+1}\Big\}aq_n\cos n\theta$$

$$v_n=\frac{1+\nu}{E}\Big\{A_n(n+4-4\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}+B_n n\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}$$

$$+C_n n\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1}+D_n(n-4+4\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^{-n+1}\Big\}aq_n\cos n\theta$$

が得られる．

次に境界条件を考えよう．まず，$r\to\infty$ で応力が発散しないためには，

$$A_n{}^2=0,\quad B_n{}^2=0 \qquad \cdots\cdots(41)$$

である．上の結果と，$r=b$ での応力，変位連続条件から，

$$A_n{}^1(-n^2+n+2)\left(\frac{b}{a}\right)^{n}+B_n{}^1(-n^2+n)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}+C_n(-n^2-n)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-2}+D_n{}^1(-n^2-n+2)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}=C_n{}^2(-n^2-n)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-2}+D_n{}^2(-n^2-n+2)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

$$A_n{}^1(n^2+n)\left(\frac{b}{a}\right)^{n}+B_n{}^1(n^2-n)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}+C_n{}^1(-n^2-n)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-2}+D_n{}^1(-n^2+n)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}=C_n{}^2(-n^2-n)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-2}+D_n{}^2(-n^2+n)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

$$A_n{}^1(-n+2-4\nu_1)\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}+B_n{}^1(-n)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+C_n{}^1 n\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-1}+D_n{}^1(n+2-4\nu_1)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n+1}=C_n{}^2\alpha n\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-1}+D_n{}^2\alpha(n+2+2\nu_2)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n+1} \qquad \cdots\cdots(42)$$

$$A_n{}^1(n+4-4\nu_1)\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}+B_n{}^1 n\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+C_n{}^1 n\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-1}+D_n{}^1(n-4+4\nu_1)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n+1}=C_n{}^2\alpha n\left(\frac{b}{a}\right)^{-n-1}$$

$$\cdots D_n{}^2\alpha(n-4+4\nu_2)\left(\frac{b}{a}\right)^{-n+1}$$

が成立する．次に，$r=a$ での応力条件から

$$\begin{aligned}&A_n{}^1(-n^2+n+2)+B_n{}^1(-n^2+n)+C_n{}^1(-n^2-n)\\&\quad+D_n{}^1(-n^2-n+2)=1\\&A_n{}^1(n^2+n)+Bn^1(n^2-n)+C_n{}^1(-n^2-n)+D_n{}^1(-n^2+n)=0\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(43)$$

が成立する．連立方程式 (42) および (43) を解くことにより，$A_n{}^1\sim D_n{}^1$ および $C_n{}^2$, $D_n{}^2$ を求める．このようにして求めた各未知数の値を(40)式の u_n に代入し，かつ $r=a$ とおけば，円管内壁の半径方向の変位が求められる．すなわち，

$$\begin{aligned}u_n(a)=\frac{1-\nu_1}{E_1}&\{A_n{}^1(-n+2-4\nu_1)+B_n{}^1(-n)+C_n{}^1n\\&+D_n{}^1(n+2-4\nu_1)\}aq_n\cos n\theta\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(44)$$

となる．一方，円管がないときは，$E_1=E_2$, $\nu_1=\nu_2$ を(42)，(43)式に代入し，この連立方程式を解くと，

$$\begin{aligned}&A_n{}^1=A_n{}^2=0,\quad B_n{}^1=B_n{}^2=0\\&A_n{}^1=A_n{}^2=0,\quad B_n{}^1=B_n{}^2=0\\&C_n{}^1=C_n{}^2=\frac{1}{2(n+1)},\quad D_n{}^1=D_n{}^2=\frac{-1}{2(n-1)}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(45)$$

が得られる．以上の各係数の値を(40)式の u_n に代入し，かつ $r=a$ とおけば，円管がない場合の，円孔内壁の半径方向の変位が求められる．すなわち，

$$u_n'(a)=\frac{1+\nu_2}{E_2}\frac{(-1)\{2n(1-\nu_2)-2\nu_2+1\}}{n^2-1}aq_n\cos n\theta\qquad\cdots\cdots(46)$$

となる．ここで，(44)式と(46)式を用いて，

$$\begin{aligned}j_n=\frac{u_n(a)}{u_n'(a)}=(n^2-1)&\{A_n{}^1(-n+2-4\nu_1)+B_n{}^1(-n)+C_n{}^1n\\&+D_n{}^1(n+2-4\nu_1)\}/\{-\alpha\{2n(1-\nu_2)-2\nu_2+1\}\}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(47)$$

とおけば，円管内壁の半径方向の変位は，

$$\begin{aligned}u_n(a)=u_n'(a)j_n&=\frac{1+\nu_2}{E_2}\frac{(-1)\{2n(1-\nu_2)-2\nu_2+1\}}{n^2-1}aq_n\cos n\theta\cdot j_n\\&=\frac{1-\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}\frac{2n(1-\nu_2)-2\nu_2+1}{n^2-1}\cos n\theta\cdot j_n\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(48)$$

と得られる．

結局，全体としての，円管内壁の半径方向の変位 $u^P(a)$ は，(31)，(39)および(48)式をたしあわせることにより，

$$\begin{aligned}u^P(a)=u_0(a)+u_1(a)+\sum_{n=2}^{\infty}u_n(a)=\frac{1+\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}&\left\{\frac{1}{2}j_0\right.\\&\left.+\frac{1-2\nu_2}{8(1-\nu_2)}\cos\theta\cdot j_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(1-\nu_2)-2\nu_2+1}{n_2-1}\cos n\theta\cdot j_n\right\}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(49)$$

とあらわすことができる.

（b）　2本の線荷重を受ける場合

図6（b）のように，ある直径をはさむ2本の線荷重を受ける場合は，半径方向の変位を $u^{2P}(a)$ とすると，(49)式を利用して，

$$u^{2P}=u^{P}(a,\theta)+u^{P}(a,\theta-180^\circ)=\frac{1+\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}\left\{j_0+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4m(1-\nu_2)-2\nu_2+1}{4m^2-1}\cos 2m\theta\cdot j_{2m}\right\} \quad \cdots\cdots(50)$$

が得られる.

（c）　3本の線荷重を受ける場合

図6（c）のように，4本の線荷重が 120° ずつの間隔で働く場合は，半径方向の変位を $u^{3P}(a)$ とすれば，(49)式を利用して，

$$u^{3P}(a)=u^{P}(a,\theta)+u^{P}(a,\theta-120^\circ)+u^{P}(a,\theta-240^\circ)$$
$$=\frac{1+\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}\left\{\frac{3}{2}j_0+3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{6m(1-\nu_2)-2\nu_2+1}{9m^2-1}\cos 3m\theta\cdot j_{3m}\right\} \quad \cdots\cdots(51)$$

が得られる.

3.3　3本の線荷重を受ける円柱の変形

図8のように，半径が a で弾性定数が E_1, ν_1 の円柱に 120° ずつ離れた3方向から同一の線荷重が作用する場合の円柱表面の半径方向の変位を求めよう．前項で扱った．円管内壁に線荷重が働く場合と同じようにして計算を進めればよい.

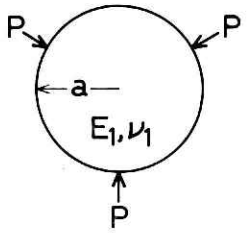


図 8　3本の線荷重を受ける弾性円柱.
Fig. 8 A solid cylinder on which three radial line forces are acting.

まず，円柱表面の応力条件は，(24)式を参考にすると $r=a$ で

$$\sigma_r=\left\{\frac{1}{2}q_0+\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos n\theta\right\}+\left\{\frac{1}{2}q_0+\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos n(\theta-120^\circ)\right\}+\left\{\frac{1}{2}q_0+\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos n(\theta-240^\circ)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}q_0+\sum_{n=1}^{\infty}q_n(1+2\cos 120^\circ n)\cos n\theta$$
$$=\frac{3}{2}q_0+\sum_{m=1}^{\infty}3q_{3m}\cos 3m\theta,\quad \tau_{r\theta}=0 \quad \cdots\cdots(52)$$
$$q_n=-\frac{P}{\pi a};\quad n\geqq 0$$

となる.

次に，応力関数は(25)式のようなものを考えるが，3本の線荷重がそれらだけで釣合っているから，$n=1$ に対応する ϕ_1 は 0 となる．従って求める応力関数は

$$\phi=\phi_0+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n$$

$$\phi_0 = c^2\left\{A_0\left(\frac{r}{c}\right)^2 + B_0\log\left(\frac{r}{c}\right)\right\}\frac{3}{2}q_0$$

$$\phi_n = c^2\left\{A_n\left(\frac{r}{c}\right)^{n+2} + B_n\left(\frac{r}{c}\right)^{n} + C_n\left(\frac{r}{c}\right)^{-n} + D_n\left(\frac{r}{c}\right)^{-n+2}\right\}3q_n\cos n\theta \qquad \cdots\cdots(53)$$

の形をとる．まず ϕ_0 による応力および変位は，(26)式中の $\frac{1}{2}q_0$ を $\frac{3}{2}q_0$ に置き換えたものに等しい．すなわち，

$$\sigma_{r,0} = a^2\left(\frac{2A_0}{a^2} + \frac{B_0}{r^2}\right)\frac{3}{2}q_0,\quad \sigma_{\theta,0} = a^2\left(\frac{2A_0}{a^2} - \frac{B_0}{r^2}\right)\frac{3}{2}q_0,\quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$u_0 = \frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{2(1-2\nu_1)\frac{A_0}{a^2}r - \frac{B_0}{r}\right\}a^2\frac{3}{2}q_0,\quad v_0 = 0 \qquad \cdots\cdots(54)$$

である．上式を利用し，$r=a$ における応力条件と，$r=0$ において $u_0=0$ であるという条件から，

$$A_0 = \frac{1}{2},\quad B_0 = 0 \qquad \cdots\cdots(55)$$

が得られる．これらの値を(54)式に代入し，$r=a$ での半径方向の変位 $u_0(a)$ を求めると

$$u_0(a) = \frac{1+\nu_1}{E_1}(1-2\nu_1)a\frac{3}{2}q_0 \qquad \cdots\cdots(56)$$

が得られる．

次に，ϕ_n による応力および変位を求めよう．これらも(41)式において，q_n を $3q_n$ に置き換えたものに等しい．$r=0$ において応力や変位が発散しないために

$$C_n = D_n = 0 \qquad \cdots\cdots(57)$$

であることはすぐわかる．そこで，

$$\sigma_{r,n} = \left\{A_n(-n^2+n+2)\left(\frac{r}{a}\right)^n + B_n(-n^2+n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right\}3q_n\cos n\theta$$

$$\sigma_{\theta,n} = \left\{A_n(n^2+3n+2)\left(\frac{r}{a}\right)^n + B_n(n^2-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right\}3q_n\cos n\theta$$

$$\tau_{r\theta,n} = \left\{A_n(n^2+n)\left(\frac{r}{a}\right)^n + B_n(n^2-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\right\}3q_n\sin n\theta \qquad \cdots\cdots(58)$$

$$u_n = \frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{A_n(-n+2-4\nu_1)\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} + B_n(-n)\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\right\}a3q_n\cos n\theta$$

$$v_n = \frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{A_n(n+4-4\nu_1)\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} + B_n n\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\right\}a3q_n\cos n\theta$$

が成立する．(52)の境界条件を考慮すると

$$A_n = B_n = 0 \quad (n \neq 3m) \qquad \cdots\cdots(59)$$

であることはすぐわかる．$n=3m$ のときは，$r=a$ での $\sigma_{r,n}$ および $\tau_{r\theta,n}$ の条件から，

(52)と(58)式を用いて，

$$\left.\begin{aligned} &A_n(-n^2+n+2)+B_n(-n^2+n)=1 \\ &A_n(n^2+n)+B_n(n^2-n)=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(60)$$

が成立する．上の連立方程式を解くことにより，

$$A_n=\frac{1}{2(n+1)},\quad B_n=\frac{-1}{2(n-1)} \quad \cdots\cdots(61)$$

が得られる．これらの値を(103)式の u_n に代入し，$r=a$ とおくことにより

$$u_n(a)=\frac{1+\nu_1}{E_1}\cdot\frac{2n(1-\nu_1)+2\nu_1-1}{n^2-1}a3q_n\cos n\theta \quad \cdots\cdots(62)$$

ただし　$n=3m$; $m\geqq 1$

が得られる．

(56)式と(62)式をたしあわせることにより，全体としての半径方向の変位 $u^{3P}(a)$ は，

$$\begin{aligned} u^{3P}(a)&=u_0(a)+\sum_{m=1}^{\infty}u_{3m}(a) \\ &=\frac{1+\nu_1}{E_1}aq_0\left\{\frac{3}{2}(1-2\nu_1)+3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{6m(1-\nu_1)+2\nu_1-1}{9m^2-1}\cos 3m\theta\right\} \quad \cdots\cdots(63) \\ &=-\frac{1+\nu_1}{\pi}\frac{P}{E_1}\left\{\frac{3}{2}(1-2\nu_1)+3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{6m(1-\nu_1)+2\nu_1-1}{9m^2-1}\cos 3m\theta\right\} \end{aligned}$$

とあらわされる．

3.4　無限遠で応力を受ける弾性体中のだ円管の変形

図9のように，長軸および短軸の長さがそれぞれ $2a$, $2b$ であるだ円孔を持った弾性体において，無限遠で一様な引張応力Sが働いており，その方向は長軸に対しβの角をなしているとする．このときのだ円孔境界の変位およびだ円孔全体の面積変化を求めてみよう．

ここで，図10のようにだ円座標を使うことにすると，

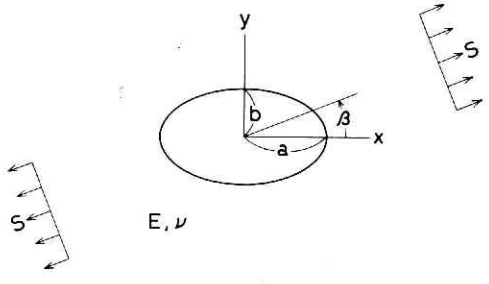


図 9　無限遠で引張り応力を受ける弾性体中のだ円孔．

Fig. 9　An elliptic hole in an elastic body subjected to tensile stress S in one direction at infinity.

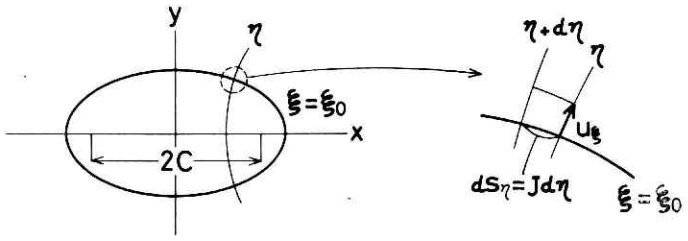


図10 だ円孔の境界および境界における法線方向の変位のだ円座標に
Fig.10 The elliptic hole and the displacement of the hole boundary by the elliptic coordinate system.

$$\left.\begin{aligned} &z=x+iy=f(\zeta)=c\cosh\zeta,\quad \zeta=\xi+i\eta \\ &x=c\cosh\xi\cos\eta,\quad y=c\sinh\xi\sin\eta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(64)$$

であらわされる．特に，だ円孔境界については，

$$\xi=\xi_0 \qquad \cdots\cdots(65)$$

が成立する．そして，この ξ_0 を用いることにより，

$$a=c\cosh\xi_0,\quad b=c\sinh\xi_0,\quad c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad \cdots\cdots(66)$$

とあらわすことができる．

今のような問題を解くために必要な複素ポテンシャルはすでに求められている（たとえば，Timoshenko and Goodier, 1970）．すなわち，

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(z)=Sc\{\exp(2\xi_0)\cos 2\beta\cosh\zeta+\{1-\exp(2\xi_0+2i\beta)\}\sinh\zeta\}/4 \\ &\chi(z)=-Sc^2\{(\cosh 2\xi_0-\cos 2\beta)\zeta+\exp(2\xi_0)\cosh 2(\zeta-\xi_0-i\beta)/2\}/4 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(67)$$

で与えられる．これらの関数を用いると，x, y 方向の変位 u, v は，

$$u+iv=\frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{E}\varphi(z)-\frac{1+\nu}{E}\{z\bar{\varphi}'(\bar{z})+\bar{\chi}'(\bar{z})\} \qquad \cdots\cdots(68)$$

であらわされる．ここで，$\bar{z}$ は z の共役複素数であり，$\bar{\varphi}$ や $\bar{\chi}$ は，それぞれの関数の中で，i に関する係数の符号をすべて逆にしたものをあらわしている．(68)式の u, v を，ξ, η 方向の変位 u_ξ, v_η に変換すると，

$$u_\xi+iv_\eta=e^{-i\theta}(u+iv) \qquad \cdots\cdots(69)$$

となる．ここで，θ は ds_ξ が x 軸となす角である．

次に，だ円孔の面積変化 ΔA は，$\xi=\xi_0$ において，

$$\Delta A=\int_0^{2\pi}u_\xi ds_\eta=\int_0^{2\pi}u_\xi J d\eta=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{Je^{-i\theta}(u+iv)\}d\eta \qquad \cdots\cdots(70)$$

であらわされる．ここで，Jについては，今の場合，

$$Je^{-i\theta}=f'(\bar{\zeta})=c\sinh\bar{\zeta} \qquad \cdots\cdots(71)$$

であらわされる．(71) 式を(69)式に代入し，さらに，(67) および (68) 式を用いることにより，

$$
\begin{aligned}
J(u_\xi+iv_\eta)&=Je^{-i\theta}(u+iv)=c\sinh\bar{\zeta}\cdot(u+iv)\\
&=\frac{Sc^2}{4}\frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{4E}\{\exp(2\xi_0)\cos 2\beta\cosh\zeta\sinh\bar{\zeta}\\
&\quad+\{1-\exp(2\xi_0+2i\beta)\}\sinh\zeta\sinh\bar{\zeta}\}\\
&\quad-\frac{Sc^2}{4}\frac{1+\nu}{E}\{\exp(2\xi_0)\cos 2\beta\cosh\zeta\sinh\bar{\zeta}\\
&\quad+\{1-\exp(2\xi_0-2i\beta)\}\cosh\zeta\cosh\bar{\zeta}\}\\
&\quad+\frac{Sc^2}{4}\frac{1+\nu}{E}\{\cosh 2\xi_0-\cos 2\beta+\exp(2\xi_0)\sinh 2(\bar{\zeta}-\xi_0+i\beta)\}
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(72)
$$

が得られる．この(72)式を整理し，(70)式に入れて積分することにより

$$
\Delta A=Sc^2\frac{2\pi(1-\nu^2)}{E}\left[\{\exp(2\xi_0)+\exp(-2\xi_0)\}/4-\frac{1}{2}\cos 2\beta\right]
\qquad\cdots\cdots(73)
$$

が得られる．一方，(66)式より

$$
\exp(2\xi_0)=\frac{a+b}{a-b}
\qquad\cdots\cdots(74)
$$

であるので，これを(73)式に代入することにより，

$$
\Delta A=\frac{\pi(1-\nu^2)}{E}\{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos 2\beta\}S
\qquad\cdots\cdots(75)
$$

となる．

無限遠における主応力が S_1，S_2 であり，S_1 が x 軸となす角が β である場合，(75)式を利用することにより，

$$
\begin{aligned}
\Delta A&=\frac{\pi(1-\nu^2)}{E}[\{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos 2\beta\}S_1+\{a^2+b^2\\
&\quad-(a^2-b^2)\cos 2(\beta+90^\circ)\}S_2]\\
&=\frac{\pi(1-\nu^2)}{E}\{(a^2+b^2)(S_1+S_2)-(a^2-b^2)(S_1-S_2)\cos 2\beta\}
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(76)
$$

が最終的に得られる．

次に，図11のように，無限弾性体（E_2，ν_2）中にだ円管（E_1，ν_1）がおさまっており，だ円管内側の長半径および短半径がそれぞれ a，b であり，管の厚みが t であるとする．このとき，管の厚みによる基本式(76)の修正について考えてみる．

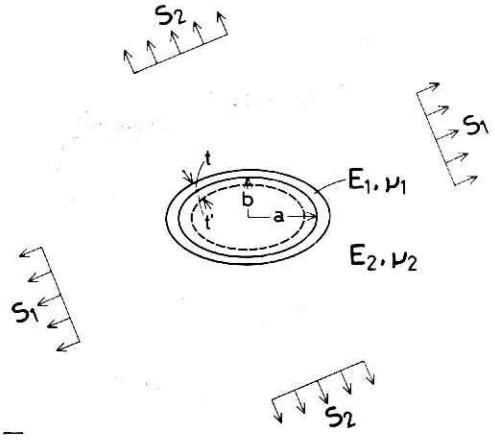


図11　厚さ t のだ円管（E_1，ν_1）と曲げに対して等価な厚さ（$t+t'$）のだ円管（E_2，ν_2）

Fig.11　An assumed elliptc cylinder made of outer material (E_2, ν_2) with thickness ($t+t'$); its resistance to bending is equivalent to that of the actual elliptic cylinder made of material(E_1, ν_1) with thickness t.

まず，右辺第1項であるが，これは主応力の和に比例し，方向には依らない量である．従って，この場合には，3.1項(a)でのべた，軸対称の応力場における円管の変形の議論が適用できる．そのためには，だ円管を内径，外径がそれぞれ r_1, r_2 である円管で近似し，(10)式の a/b のかわりに r_1/r_2 を代入して f を求めればよい．たとえば，a, b の算術平均を用いて

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{a+b}{a+b+2t} \qquad \cdots\cdots(77)$$

を使えば十分であろう．

次に，(76)式の $(a^2-b^2)\cos 2\beta$ を含む項について考えよう．前の (a^2+b^2) を含む項は，だ円孔全体の一様な面積膨張をあらわすものであり，図11のだ円管部分の変形のうち，周方向の引張りによる変形の結果を示している．これに対し，$(a^2+b^2)\cos 2\beta$ を含む項は，だ円管部分の曲げによる変形の結果をあらわしている．そこで，次のような簡便法により，だ円管部分の影響を見つもる．すなわち，図11において，外側の物質が，厚み t のだ円管に置き換わり，さらに t' だけ内側に張り出してきたとする．そして，この厚み $(t+t')$ の弾性定数 E_2, ν_2 の物質が，厚み t の弾性定数 E_1, ν_1 の物質と同じ曲げ抵抗を持つようになっているとする．このようにすると問題を，長半径が $(a-t')$，短半径が $(b-t')$ であるような裸のだ円孔の変形の問題に帰着させることができる．板の曲げ抵抗が同じであるときは，曲げ剛性 D が等しいことであるから，

$$D=\frac{E_1t^3}{12(1-\nu_1^2)}=\frac{E_2(t+t')^3}{12(1-\nu_2^2)} \qquad \cdots\cdots(78)$$

となっている．すなわち，だ円管よりさらに内側に張り出してくる部分の厚み t' が，

$$t'=\left[\left\{\frac{E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)}\right\}^{1/3}-1\right]t \qquad \cdots\cdots(79)$$

となっていればよい．

今までの議論をまとめてみると，だ円管がある場合には，(76)式のかわりに，

$$\Delta A=\frac{\pi(1-\nu_2^2)}{E_2}\{(a^2+b^2)(S_1+S_2)f-(a'^2-b'^2)(S_1-S_2)\cos 2\beta\} \qquad \cdots\cdots(80)$$

ただし，　$a'=a-t'$, $b'=b-t'$

を使えばよい．

4. 各型式のひずみ計による3成分ひずみ決定の基礎計算式

4.1 だ円筒型の場合

今，図12のように，図11と同じ形のだ円管1，2，3が，120°ずつ開いて並んでいるとする．このとき，S_1 はそれぞれのだ円の長軸に対して，β, $\beta+60°$, $\beta-60°$ の角をなしているとする．このとき，(80)式のかわりに次の連立方程式が成立する．すなわち，

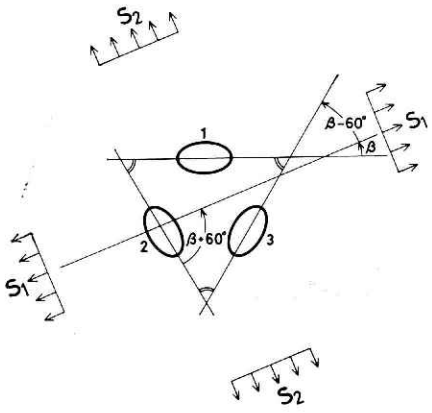


図12　無限遠で引張り応力を受ける弾性体中に，軸心は平行で長軸の方向を120°ずつ違えて配置した3本のだ円孔．

Fig.12　Three elliptic holes in an elastic body subjected to tensile stresses S_1 and S_2 at infinity.

$$\begin{aligned}
\Delta A_1&=\frac{\pi(1-\nu_2^2)}{E_2}\{(a^2+b^2)f(S_1+S_2)-(a'^2-b'^2)(S_1-S_2)\cos 2\beta\}\\
\Delta A_2&=\frac{\pi(1-\nu_2^2)}{E_2}\{(a^2+b^2)f(S_1+S_2)-(a'^2-b'^2)(S_1\\
&\quad -S_2)\cos(2\beta+120^\circ)\}\\
\Delta A_3&=\frac{\pi(1-\nu_2^2)}{E_2}\{(a^2+b^2)f(S_1+S_2)-(a'^2-b'^2)(S_1\\
&\quad -S_2)\cos(2\beta-120^\circ)\}
\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(81)$$

である．ここで，ΔA_1，ΔA_2，ΔA_3 はそれぞれのだ円管の断面積変化であり，観測から得られるものである．また弾性定数 E_2，ν_2 も別途測定できる．そこで，連立方程式(81)を解くことにより，S_1，S_2 および β が求まる．すなわち

$$\begin{aligned}
S_1+S_2&=\frac{\Delta A E_2}{3\pi(1-\nu_2^2)(a^2+b^2)f}\\
\tan 2\beta&=\frac{\sqrt{3}(\Delta A_2-\Delta A_3)}{\Delta A-3\Delta A_1}\\
S_1-S_2&=\frac{(\Delta A-3\Delta A_1)E_2}{3\pi(1-\nu_2^2)(a'^2-b'^2)\cos 2\beta}\\
&\text{ただし，}\quad \Delta A=\Delta A_1+\Delta A_2+\Delta A_3
\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(82)$$

である．S_1 および S_2 をひずみに変換するためには，平面ひずみ問題の場合，次の変換式を使えばよい．すなわち，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{1+\nu_2}{E_2}\{(1-\nu_2)S_1-\nu_2 S_2\}\\
\varepsilon_2&=\frac{1+\nu_2}{E_2}\{-\nu_2 S_1+(1-\nu_2)S_2\}
\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(83)$$

である．

4.2　直径拘束円筒型の場合

図13のように，無限弾性体の中に円管があり，その1直径方向は弾性物体によりピン拘束されている．無限遠において S_1，S_2 という引張り応力が働くとき，円孔断面積の変化がど

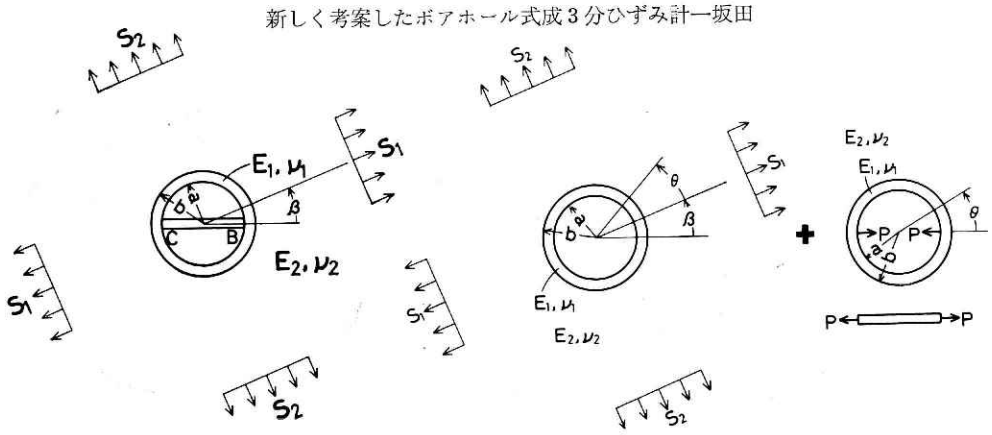


図13 無限遠で引張り応力を受ける弾性体中の，直径を拘束された円管．

Fig.13 A cylinder, a diameter of which is constrained, in an elastic body subjected to tensile stresses S_1 and S_2 at infinity.

図14 図13の状態を三つの状態に分解したもの。左側は，無限遠で引張り応力を受ける弾性体中の円管をあらわし，右上は，1対の線荷重を内壁に受ける，弾性体中の円管であり，右下は，1対の線荷重を受ける拘束物体を示す．

Fig.14 Dissolution of the state in Fig. 13 into three parts; P is unknown at this stage.

なるか考えてみる．図13で示される状態は，図14で示されるように，無限遠で主応力S_1，S_2を受ける図無限弾性体中の円管の変形と，内壁に一対の線荷重を受ける，無限弾性体中の円管の変形の重ね合せで表現することができる．後者における線荷重の値Pは未知数であり，全体の変形を通じて，円管部分と拘束物体が離れもせず，重なりもしないという条件から求めることができる．

まず，図14左における円孔の断面積変化 ΔA^0 を求めてみよう．(23)式の $u(a)$ を用いることにより，

$$\Delta A^0=\int_0^{2\pi}u(a)ad\theta=\frac{2\pi(1-\nu_2^2)}{E_2}a^2(S_1+S_2)f \qquad \cdots\cdots(84)$$

が成立する．ここでは，断面積の増加を正としている．

次に，図14右のような場合の円孔断面積の変化 ΔA^{2P} を求めてみよう．P という値を持つ外向きの線荷重が，ある直径をはさんで2本働く場合の，円管内壁の半径方向の変位をあらわす(50)式を利用することにより，

$$\Delta A^{2P}=\int_0^{2\pi}u^{2P}(a)ad\theta=2(1+\nu_2)a\frac{P}{E_2}j_0 \qquad \cdots\cdots(85)$$

が求まる．上式で P は，円孔の中心を向いているときを正としたので，ΔA^{2P} は断面積の減少を正としている．

以上(84)および(85)式を利用して，図13の場合の全体としての円孔断面積の増加 ΔA は，

$$\Delta A=\Delta A^0-\Delta A^{2P}=\frac{2\pi(1-\nu_2^2)a^2}{E_2}\left\{(S_1+S_2)f-\frac{Pj_0}{\pi(1-\nu_2)a}\right\} \qquad \cdots\cdots(86)$$

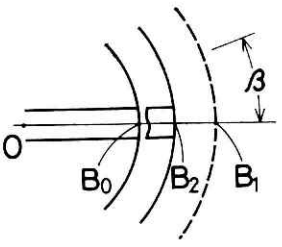


図15　B拘束点近傍の変形，B_0：応力が働かないときの拘束点の位置 B_1：円管内壁が拘束されていないとしたとき，無限遠での応力により，拘束点に対応する内壁の点が移動してくる位置．B_2：無限遠で応力が働くときの拘束点の位置．拘束物体からの引張り力と円筒を含む外側物体からの引張り力が釣り合っている．

Fig.15　Deformation near joint B; B_0: position of joint B in stress-free state, B_1: position of the point on the inner surface of the cylinder corresponding to the joint when the tensile stresses S_1 and S_2 are acting at infinity and the joint is disconnected, B_2: equilibrium position when the joint is connected.

とあらわされる．

以上のことを考慮に入れ，さっそく未知数Pの値を求めてみよう．図15は，拘束点近傍の変形をあらわしたものである．まず，B_0は，無限遠で引張り応力が働いていないときの拘束点の位置をあらわす．次に，無限遠で引張り応力 S_1，S_2 が働いたとき，もし B_0 が拘束されていないとすれば，B_0 は，(23)式の $\boldsymbol{u}(a)$ で $\theta=-\beta$ とおいたときの値 u_β だけ変位し，B_1 に至るはずである．しかし実際は，拘束物体に働く右向きの引張り線荷重と，円管内壁に働く左向きの引張り線荷重とが釣り合う位置に B_2 落着くことになる．この引張り線荷重の絶対値が P となっている．拘束物体が中心から引き伸される量 B_0B_2 は，P に正比例するので，P/K_1 であらわすことができる．また，円管内壁が中心方向に引き寄せられる量 B_1B_2 も P に正比例し，P/K_2 であらわされる．これらの和が B_0B_1 に等しいから，

$$u_\beta=\frac{P}{K_1}+\frac{P}{K_2}=\frac{P}{K},\quad \frac{1}{K}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} \qquad \cdots\cdots(87)$$

が成り立つ．K の値は別途計算で求める．一方，u_β の値は，(23)式から，

$$u_\beta=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a\{(S_1+S_2)f+2(S_1-S_2)g\cos 2\beta\} \qquad \cdots\cdots(88)$$

と求められる．(87)，(88)式から

$$P=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}Ka\{(S_1+S_2)f+2(S_1-S_2)g\cos 2\beta\} \qquad \cdots\cdots(89)$$

が求まる．(89)式のPを(86)式に代入することにより，

$$\Delta A=\frac{2\pi(1-\nu_2^2)}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)f\left(1-\frac{1+\nu_2}{\pi E_2}Kj_0\right)-(S_1-S_2)\frac{2(1+\nu_2)}{\pi E_2}Kj_0g\cos 2\beta\right\} \qquad \cdots\cdots(90)$$

が求められる．この(90)式を(80)式と比べてみると，同じ形をしていることがわかる．従って，直径拘束円筒型は，数学的には，長軸方向が直径拘束の方向と一致するようなだ円筒型と同等に扱えることがわかった．

なお，図13のB，C点は現実にはピン接点でなく剛接点になるため，引張り線荷重以外に

モーメントや円周方向の反力が働くことになり，それらによる管内壁の変形も出てくる．しかし，これらの変形による円孔断面積変化は，互いに打消しあうので，全体としての断面積変化には寄与しない．従ってここでは，モーメントや円周方向の反力の大きさについては考えなくてもよい．

4.3 剛隔壁3分割二重円筒型

図16のように，無限弾性体の中に円管があり，その内壁を120°ずつに3分割する点は，半径方向の変位が弾性的に拘束されているとする．後での計算の便利を考え，この弾性拘束物体と円管内壁は，1カ所はピン接合で他の2カ所はローラ接合されていると仮定する．従って，接点においてモーメントや円周方向の反力は働かず，また，この拘束物体は，周囲の弾性体に対して回転しないものとする．

この拘束物体と円管との間に，三つの相互に隔離されたブロック1，2，3ができる．いま，この無限弾性体の無限遠に S_1，S_2 という引張り応力が働くとき，これらブロックの断面積変化がどうなるか考えてみよう．図16で示される状態は，図17で示されるように，無限遠で主応力 S_1，S_2 を受ける無限弾性体中の円管の変形と，内壁に3本の同一の線荷重を受ける，無限弾性体中の円管の変形の重ね合せで表現することができる．後者において，3本の線荷重が同一の値 P（今は未知数）をとることは，完全な2次元問題として，円管内部の拘束物体に働く力が，それだけで釣り合いの状態にあるとすれば，容易にわかることであ

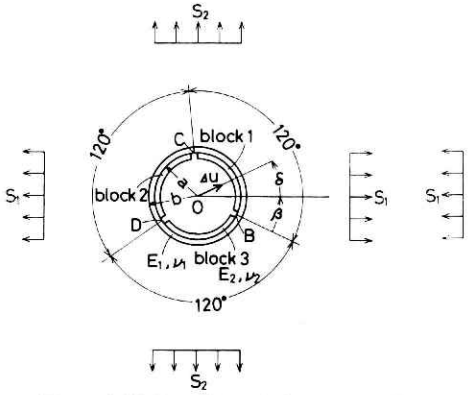


図16 無限遠で引張り応力を受ける弾性体中の，内壁の3分割点を弾性的に拘束した円管．Δu, δ は，内部拘束物体中心の並進の量および方向をしめす．

Fig.16 A cylinder in an elastic body subjected to tensile stresses S_1 and S_2 at infinity; the inner surface of the cylinder is radially constrained at three lines. (Δu, δ) shows the translation vector of the constrainer.

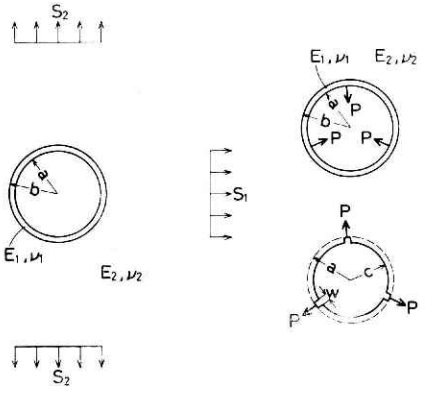


図17 図16の状態を三つの状態に分解したもの．左側は，無限遠で引張り応力を受ける弾性体中の円管をあらわし，右上は，内壁に作用する3本の線荷重を受ける，無限弾性体中の円管であり，右下は，3本の線荷重を受ける円柱状拘束物体をあらわす．

Fig.17 Dissolution of the state in Fig. 16 into three parts; P is unknown at this stage.

る．

まず，図17左のような状態が，各ブロックの断面積変化に寄与する分を計算してみよう．(23)式を使うと，第1のブロックについては，

$$\Delta A_1^0=\int_{-\beta}^{120°-\beta}u(a)ad\theta=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}g\cos(2\beta-120°)\} \quad \cdots\cdots(91)$$

が得られる．同様にして，第2，第3ブロックについても，

$$\left.\begin{aligned}\Delta A_2^0&=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}g\cos 2\beta\right\}\\ \Delta A_3^0&=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}g\cos(2\beta+120°)\right\}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(92)$$

が得られる．

次に，図17右のように，3本の同一の値を持つ線荷重が円管内壁に働くとき，これらが各ブロックの断面積変化に寄与する分を計算してみよう．線荷重の値が同一であるから，この量は各ブロックについて同じである．Pという値を持つ線荷重が，120°づつ開いて3本働く場合の，円管内壁の半径方向の変位をあらわす(51)式を利用することにより，各ブロックの断面積変化は，

$$\Delta A_1^{3P}=\Delta A_2^{3P}=\Delta A_3^{3P}=\int_0^{120°}u^{3P}(a)ad\theta=\frac{1+\nu_2}{E_2}aPj_0 \quad \cdots\cdots(93)$$

なると．上式でPは，円孔の中心を向いているときを正としているので，ΔA_i^{3P}は断面積の減少を正としている．

以上の(91)，(92)，(93)および(94)式を利用して，図16の各ブロックの断面積の増加ΔA_1，ΔA_2およびΔA_3は，

$$\left.\begin{aligned}\Delta A_1&=\Delta A_1^0-\Delta A_1^{3P}=\frac{1+\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}g\cos(2\beta-120°)\right\}-\frac{1+\nu_2}{E_2}aPj_0\\ \Delta A_2&=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}g\cos 2\beta\right\}-\frac{1+\nu_2}{E_2}aPj_0\\ \Delta A_3&=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}g\cos(2\beta+120°)\right\}-\frac{1+\nu_2}{E_2}aPj_0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(95)$$

となる．上の連立方程式から，Pは未知数のままでも，βは求めることができる．

次に，Pの値を求めよう．図16において弾性拘束物体の中心Oが，S_1に対してδの角を

持ちながら，半径方向に Δu だけ変位し，各拘束点に働く力 P が同じになるとする．このとき，各バネの伸縮量は同一である．いいかえれば，バネが働いていないとしたとき，外側円筒とバネの各頂点との間隔は同じになる．この間隔の大きさを $\bar{u}$ とすると，それぞれのバネについて，

$$\left.\begin{aligned} &u(-\beta)-\Delta u\cos(\delta+\beta)=\bar{u}\\ &u(120^\circ-\beta)-u\cos(\delta+\beta-120^\circ)=\bar{u}\\ &u(240^\circ-\beta)-\Delta u\cos(\delta+\beta-240^\circ)=\bar{u}\\ &\quad\text{ただし，}\quad u(\theta)=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a\{(S_1+S_2)f+2(S_1-S_2)g\cos 2\theta\} \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(96)$$

が成立する．この連立方程式を解くことにより，

$$\bar{u}=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a(S_1+S_2)f,\quad \Delta u=\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}a(S_1-S_2)g,\quad \delta=-3\beta \qquad\cdots\cdots(97)$$

が得られる．次に図18は，第1の隔壁について，拘束点近傍の変形をあらわしたものである．ただし，円周方向については無視し，半径方向についてのみ図示してある．まず，B は，無限遠に応力が働いていないときの拘束点の位置である．次に，無限遠に引張り応力 S_1，S_2 が働いたとき，もし B_0 が拘束されていないとすれば，B_0 は，$u(-\beta)$ だけ移動し B_1 に至るはずである．そのうちの B_0B_0' は，拘束物体の中心の隔壁方向の移動量であり，その値は，(97)式を利用して，

$$B_0B_0'=O''O'=\Delta u\cos(\delta+\beta)=\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}a(S_1-S_2)g\cos 2\beta \qquad\cdots\cdots(98)$$

となる．従って，$B_0'B_1$ は先にのべた間隔 $\bar{u}$ であり，

$$B_0'B_1=B_0B_1-B_0B_0'=u(-\beta)-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}a(S_1-S_2)g\cos 2\beta \qquad\cdots\cdots(99)$$

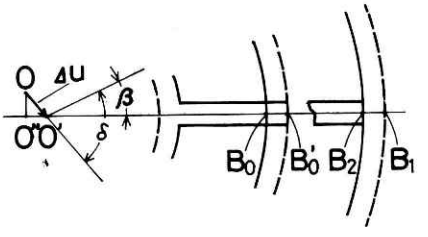


図18　B拘束近傍の変形．OO′：拘束物体の中心Oの移動量．O″O′：OO′ の隔壁方向への投影量，B_0：応力が働かないときの拘束点の位置．B_0'：$B_0B_0'=O''O'$ となっているような点．B_1：円管内壁が拘束されていないとしたとき，無限遠での応力により，拘束点に対応する内壁が移動してくる位置．B_2：無限遠で応力が働くときの拘束点の位置．拘束物体からの引張り力と，円簡を含む外側物体からの引張り力が釣り合っている．

Fig.18　Deformation near joint B; OO′: translation vector of the center of the constrainer, O″O′: projection of vector OO′ to the partition wall direction, B_0: position of the joint in stress-free state, B_0': position which allows the equation $B_0B_0'=O''O'$, B_1: position of the point on the inner surface of the cylinder corresponding to the joint when the tensile stresses are acting at infinity and the joint is disconnected, B_2: equilibrium position when the joint is connected.

$$=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a(S_1+S_2)f=\bar{u}$$

となっており，(97)式は満足されている．先にものべたように，隔壁の先端が相対する円筒内壁面に接合されていないとき，すなわち無拘束のときは，$B_0'B_1=\bar{u}$ というすき間ができることになる．しかし実際は拘束状態にあるため，隔壁の先端は，隔壁に働く右向きの引張り荷重と，円管内壁に働く左向きの引張り荷重とが，針合う位置 B_2 に落着くことになる．この引張り荷重の値がPとなっている．隔壁の先端が拘束物体の中心に対して引伸ばされる量 $B_0'B_2$ は，隔壁のバネ定数を K_0 とすれば，

$$B_0'B_2=P/K_0 \qquad \cdots\cdots(100)$$

であらわされる．

次に，3本のバネのそれぞれからPという値の引張り線荷重を受けることにより，円管内壁が中心方向に引き寄せられる量 B_1B_2 について考えてみる．この量を P/K_1 であらわすとき，K_1 は，外側物体に関するバネ定数といえる．この K_1 を求めるには，図6(c)において，3本の線荷重による円管内壁の変位を求める式(51)が基本なとる．この場合，これらの荷重が真の線荷重であるとすると，(51)式で $\theta=0°$，$\pm120°$とおいたとき，$u^{3P}(a)$ が発散することからわかるように，K_1 は定まらない．しかし，実際には分布荷重となっているので，現実の形状について数値計算を行い，K_1 の値を求めることができる．計算例は第5節に示す．

さて，今のべたところから，

$$B_1B_2=P/K_1 \qquad \cdots\cdots(101)$$

であるから，これと(100)式をあわせることにより，

$$B_0'B_1=\frac{P}{K_0}+\frac{P}{K_1}=\frac{P}{K},\quad \frac{1}{K}=\frac{1}{K_0}+\frac{1}{K_1} \qquad \cdots\cdots(102)$$

となる．上式と(99)式から，

$$\frac{P}{K}=\bar{u}=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a(S_1+S_2)f \qquad \cdots\cdots(103)$$

となるから，

$$P=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a(S_1+S_2)fK \qquad \cdots\cdots(104)$$

が得られる．このPの値を(95)の各式に代入すると，

$$\begin{aligned}\Delta A_1&=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)f\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1+\nu_2}{E_2}Kj_0\right)+(S_1\right.\\&\left.-S_2)\sqrt{3}\,g\cos(2\beta-120°)\right\}\\\Delta A_2&=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)f\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1+\nu_2}{E_2}Kj_0\right)+(S_1\right.\\&\left.-S_2)\sqrt{3}\,g\cos 2\beta\right\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(105)$$

$$\Delta A_3=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)f\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1+\nu_2}{E_2}Kj_0\right)+(S_1-S_2)\sqrt{3}\,g\cos(2\beta+120^\circ)\right\}$$

が最終的に得られる．上の連立方程式を解くことにより，

$$\left.\begin{aligned}&S_1+S_2=\Delta AE_2/\left[(1-\nu_2^2)a^2\left\{2\pi-\frac{3(1+\nu_2)}{E_2}Kj_0\right\}f\right]\\&\tan 2\beta=(\Delta A_3-\Delta A_1)/\{\sqrt{3}(\Delta A-3\Delta A_2)\}\\&S_1-S_2=-(\Delta A-3\Delta A_2)E_2/\{3\sqrt{3}(1-\nu_2^2)ga^2\cos 2\beta\}\\&\quad\text{ただし，}\quad\Delta A=\Delta A_1+\Delta A_2+\Delta A_3\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(106)$$

が得られる．

4.4 スライド隔壁3分割二重円筒型

図19に示すように，無限遠で S_1，S_2 の引張り応力を受ける弾性体中に，内半径が a，外半径が b の円管がある．この円管の内部に同心で半径 a_i の円柱があり，円管との間は，理想的な隔壁で3ブロックに分割されているとする．すなわち，この隔壁は，内外管との接続部分において回転に対する抵抗が0であり，また，半径方向の伸縮は自由でありながら常に直線を保つようなものである．そして，S_1 は第1の隔壁に対して β の角をなしているとする．なお内部の円柱は，外側の弾性体に対して回転しないようになっているとする．

さて，円管内壁の変位 $u(a)$，$v(a)$ は，隔壁の抵抗がないのであるから，(23) 式で与えられたとおりである．これを利用して各ブロックの面積変化を計算してみよう．

まず，第1のブロックについては，

$$\Delta A_1=\int_{-\beta}^{120^\circ-\beta}u(a)ad\theta+\frac{1}{2}(a-a_i)\left[v(a)\right]_{-\beta}^{120^\circ-\beta}\qquad\cdots\cdots(107)$$

が成立する．この式の右辺第項は，図20に示すように，円弧ABの半径方向の移動による面積増加であり，右辺第2項は，隔壁ADおよびBEの回転による面積増加である．(23)式を(107)式に代入することにより，

$$\left.\begin{aligned}\Delta A_1=&\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f\right.\\&\left.+(S_1-S_2)\sqrt{3}\,g'\cos(2\beta-20^\circ)\right\}\\&\text{ただし，}\ g'=g+\left(1-\frac{a_i}{a}\right)h\end{aligned}\right\}\qquad\cdots(108)$$

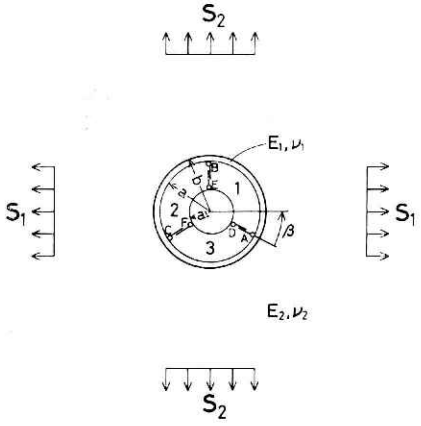


図19 無限遠で引張り応力を受ける弾性体中の，スライド式隔壁で3分割された二重円管．

Fig.19 A dual cylinder system in an elastic body subjected to tensile stresses S_1 and S_2 at infinity; the clearance between the two cylinders is divided into three blocks by three sliding partition walls.

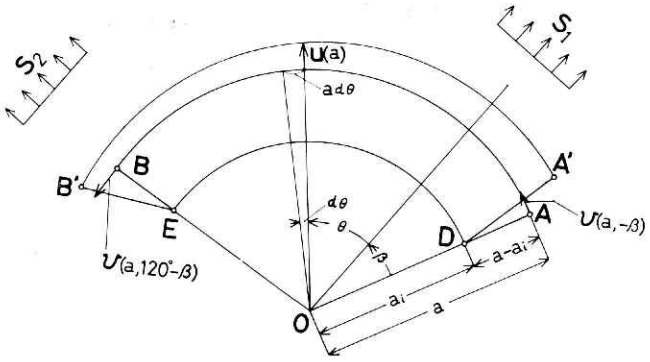


図20　図19中第1ブロックの変形．断面積変化は，円孤ABの半径方向の変位と，スライド式隔壁ADおよびBEの回転による．

Fig.20　Deformation of the first block in Fig. 19; change of the block area is due to the redial displacement of the are AB and the retations of slideing walls AD and BE.

が得られる．同様に，第2，第3のブロックの面積変化は，

$$\Delta A_2=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}\,g'\cos 2\beta\right\}$$
$$\Delta A_3=\frac{1-\nu_2^2}{E_2}a^2\left\{(S_1+S_2)\frac{2\pi}{3}f+(S_1-S_2)\sqrt{3}\,g'\cos(2\beta+120^\circ)\right\}\qquad\cdots\cdots(109)$$

となる．(108)，(109)式は(106)式と同じ形をしており，この連立方程式を解くことにより，S_1，S_2，β が求まることがわかる．

5.　剛隔壁3分割二重円筒型についての計算例

今まで，各型式の3成分ひずみ計の基礎式を導いてきたが，実際の製作および設置を考えた場合，工作が比較的簡単で，設置のための孔も1本ですむという利点から，剛隔壁3分割二重円筒型が最適であると判断した．そこで，この型式のものについて，実際の寸法にのっとり，(105) 式にでてくる各種の係数を求めてみよう．

まず，図15，16において，円管はステンレス鋼でできており，弾性定数は，$E_1=2\times10^{11}$ N/m²，$\nu=0.25$ とする．また，内外半径は，$a=54$ mm，$b=57$ mm である．内側拘束物体もステンレス鋼でできており，円柱部分の半径は，$c=52$ mm であり，突出部の幅は，$w=12$ mm である．突出部の高さは，$a-c=2$ mm となっている．円管の外側物質は，花コウ岩を仮定し，$E_2=6\times10^{11}$ N/m²，$\nu_2=0.25$ とする．

以上より，$a/b=0.95$，$\alpha\fallingdotseq3$ であるので，(10)式，

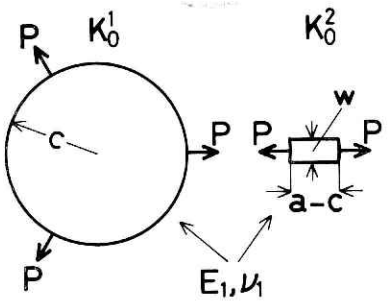


図21　剛隔壁3分割二重円筒型の内部拘束物体(図17右下)のバネ定数を計算するために，円柱部分と突出部の2つに分解した状態．

Fig.21　Dissolution of the inner constraining body in Figs. (16) and (17) into four parts : a solid cylinder which has spring constant K_0^1, and three protrudent parts, each of which has spring constant K_0^2; the ultimate spring constant K_0 is synthesized from K_0^1 and K_0^2.

図4，(31)式より，$f=0.88$, $g=0.95$, $j_0=0.86$ が得られる．

次に，(102)式中の K の値を求めよう．そのために，まず K_0 の値を求める．このバネ定数 K_0 は，図21のように，拘束物体の円柱部分による K_0^1 と，突出部分による K_0^2 からなり，

$$\frac{1}{K_0}=\frac{1}{K_0^1}+\frac{1}{K_0^2} \qquad \cdots\cdots(110)$$

であらわされる．

K_0^1 を求めるには，図8のように，円柱表面に3方向から同一の線荷重が働く場合について，円柱表面の半径方向の変位をあらわす(63)式を利用する．今までの計算では，P という値を持つ線荷重を扱ってきたが，実際は，図21にみるように，突出部は有限の幅をもっているから，面荷重となっている．いま，この面荷重は，

$$p=\frac{P}{w} \qquad \cdots\cdots(111)$$

であらわされる均一な値をもち，円柱の表面に垂直に働いていると仮定する．この均一な面荷重によって，突出部に接している円柱表面が，半径方向にどの程度変位するか推測してみよう．図22において，突出部の位置を示す円弧$\overset{\frown}{\mathrm{LN}}$の中点をMとする．Xは$\overset{\frown}{\mathrm{LN}}$あるいはその延長上に任意にとった点である．円弧$\overset{\frown}{\mathrm{LN}}$の中心角を $\Delta\theta$ とし，Xの位置をあらわすパラメータ x を導入すると，

$$\Delta\theta=\overset{\frown}{\mathrm{LM}}/\mathrm{OL}\fallingdotseq w/c,\quad \angle\mathrm{MOX}=\Delta\theta x/2 \qquad \cdots\cdots(112)$$

とあらわすことができる．X点の半径方向の変位は，(63)および(111)式をもとにして，

$$\begin{aligned}u'(x)=&\int_{-\Delta\theta(1+x)/2}^{\Delta\theta(1-x)/2}\frac{1+\nu_1}{\pi E_1}\frac{P}{w}\left\{(1-2\nu_1)+3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{6m(1-\nu_1)+2\nu_1-1}{9m^2-1}\right.\\&\left.\cos 3m\theta\right\}cd\theta\\=&\frac{1+\nu_1}{\pi}\frac{Pc}{E_1w}\left[\frac{3}{2}(1-2\nu_1)\theta+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{6m(1-\nu_1)+2\nu_1-1}{m(9m^2-1)}\right.\\&\left.\sin 3m\theta\right]_{-\Delta\theta(1+x)/2}^{\Delta\theta(1-x)/2}\\=&\frac{1+\nu_1}{\pi}\frac{P}{E_1}\left\{\frac{3}{2}(1-2\nu_1)+\frac{2}{\Delta\theta}\sum_{m=1}^{\infty}\right.\\&\left.\frac{6m(1-\nu_1)+2\nu_1-1}{m(9m^2-1)}\sin(1.5m\Delta\theta)\cos(1.5m\Delta\theta x)\right\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(113)$$

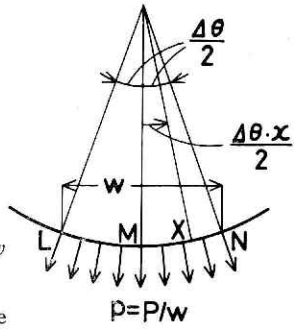


図22 図21の円柱表面に，線荷重Pのかわりに，等分布荷重 $p=P/w$ が働いている状態．ただし $\theta=c/w$ である．

Fig.22 Assumed uniform distribution of load p instead of the line force on the solid cylinder in Fig. 21; $\theta=c/w$.

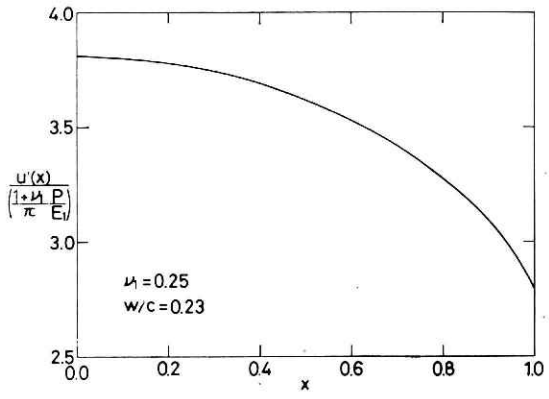


図23　図22の等分布荷重による．円柱表面の半径方向の変位分布

Fig.23　Distribution of radial displacement of the cylinder surface in Fig. 22.

が求められる．図23のグラフは，$\Delta\theta=0.23$ のときの$u'(x)$の分布を示すものである．級数の和は，$m=100$ までとってある．このグラフから，$u'(x)$ の平均値 $\overline{u(x)}$ は，

$$\overline{u(x)}=\frac{3.5(1+\nu_1)}{\pi}\frac{P}{E_1} \qquad \cdots\cdots(114)$$

と得られる．また，$u'(0)$ と $u'(1)$ の差は小さいので，実際の変位も，上の平均値に一致する均一なものが起ると考える．先に均一荷重を仮定し，今度はその結果として均一変位を考えるのは，厳密にはおかしいが，実用上はさしつかえない．そこでバネ定数 K_0' は，(114)式から

$$\frac{1}{K_0'}=\frac{\overline{u(x)}}{P}=\frac{3.5(1+\nu_1)}{\pi E_1} \qquad \cdots\cdots(115)$$

と求められた．

次に K_0^2 の値を求めてみよう．図21右のように，長さが $a-c$，高さが w で厚みが1の直方体物体に，P/w という値の水平方向の引張り応力が働くとき，この物体の伸びる量 Δl は，平面ひずみ状態であるから，

$$\Delta l=\varepsilon(a-c)=\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\sigma(a-c)=\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\frac{P}{w}(a-c) \qquad \cdots\cdots(116)$$

となり，求めるバネ定数 K_0^2 は，

$$\frac{1}{K_0^2}=\frac{\Delta l}{P}=\frac{a-c}{w}\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \qquad \cdots\cdots(117)$$

となる．

(110)式に(115)および(117)式を代入することにより，拘束物体についてのバネ定数K_0は，

$$\frac{1}{K_0}=\left\{\frac{3.5(1+\nu_1)}{\pi}+\frac{a-c}{w}(1-\nu_1^2)\right\}\frac{1}{E_1}=\frac{1.55}{E_1} \qquad \cdots\cdots(118)$$

と求められた．

次に，K_1 の値を求めよう，(51)式を利用し，K_0' の値を求める時の (113) 式と同じような積分を行えば，分布荷重 P/w による半径方向の変位 $u'(x)$ は，

$$u'(x)=\frac{1+\nu_2}{\pi}\frac{P}{E_2}\left\{\frac{3}{2}j_0+\frac{2}{\Delta\theta}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{6m(1-\nu_2)-2\nu_2+1}{m(9m^2-1)}\right. \qquad \cdots\cdots(119)$$

$$\sin(1.5\mathrm{m}\Delta\theta)\cos(1.5\mathrm{m}\Delta\theta x)\cdot \boldsymbol{j}_{3m}\}$$

となる．上の式に，$\Delta\theta \fallingdotseq w/a=0.22$，すでに求めた $\boldsymbol{j}_0=0.86$ および(47)式による $\boldsymbol{j}_{3m}$ を代入し，数値計算を行った結果，

$$u(x)=\frac{3.3(1+\nu_2)}{\pi}\quad\frac{P}{E_2}, \qquad \cdots\cdots(120)$$

が求められた．従って，

$$\frac{1}{K_1}=\frac{u(x)}{P}=\frac{3.3(1+\nu_2)}{\pi E_2}=\frac{1.31}{E_2} \qquad \cdots\cdots(121)$$

と求められた．(118)および(121)式を(102)代入することにより

$$\frac{1}{K}=\frac{1.55}{E_1}+\frac{1.31}{E_2}=\frac{1.55}{\alpha E_2}+\frac{1.31}{E_2}=\frac{1.9}{E_2},\quad K=\frac{E_2}{1.9} \qquad \cdots\cdots(122)$$

と得られる．

最後に，今まで求めてきた，$f=0.88$，$g=0.95$，$\boldsymbol{j}_0=0.86$ および $K=E_2/1.9$ の値を(106)式に代入することにより，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{S_1+S_2}{E_2}=\frac{\Delta A}{3.8a^2}\\&\tan 2\beta=\frac{\Delta A_3-\Delta A_1}{\sqrt{3}(\Delta A-3\Delta A_1)}\\&\frac{S_1-S_2}{E_2}=\frac{3\Delta A_2-\Delta A}{4.6a^2}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(123)$$

が最終的な式として得られた．

6. おわりに

以上，各型式の3成分ひずみ計の基礎なると式を，無限遠で引張り応力を受ける弾性体中の，円管の変形を求めるという立場で求めてきた．すべて平面ひずみ状態にあるとして解いてきたが，現実には有限長の円管を使うのであるから，端末の影響を見つもる必要がある．全長から直径の2倍を差し引いたものを有効長と考えれば，ほぼまちがいはなかろう．

今までの議論では，金属製のひずみ計筒部と岩石との隙間を充てんする膨張性モルタルの弾性定数は，周囲の岩体のそれに等しいと仮定し，二層モデルを採用してきたが，このような仮定が成立しない時は，三層モデルを適用する必要がある．計算の方法は，二層モデルと基本的に同じである．

第5節でも述べたが，製作および設置上の利点を考慮し，55年度現在，剛隔壁3分割二重円筒型のものを製作中であり，56年度には設置の予定である．この型式の場合，1本のボーリング孔にひずみ計一式が収容されるため，だ円筒型や直径拘束円筒型の場合のように，3本のボーリング孔の地点の相違を気にする必要はないが，三つのブロックの，遠方からの応力に対する機械的変形特性が，できる限り同一であることが最重要である．

また，実際の設置にあたっては，ひずみ計の軸心を，ボーリング孔の軸心と同心にすることも重要である．充てん用の膨張性モルタルの弾性定数を，周囲の岩体のそれと完全に同一にすることが期待できない以上，三層モデルによる計算を行いやすくするためである．

以上の重要問題の解決のために採った具体的なことについては，実際の製作や設置に関する今後の報告中にのべるつもりである．

参考文献

1) 古屋逸夫 (1978)：円筒の変形一容積歪計に則して．地震学会講演予稿集，**2**，122.
2) 末広重二 (1979)：地殻変動連続観測と埋込式歪計（I）．測候時報，**46**．1-2，9-25.
3) Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier (1970)：Theory of Elasticity, McGraw-Hill.

(1980年12月8日　原稿受理)