鉛直降雨浸透の有限要素法による－解法－計算誤差の発生とその除去法－

著者	大倉 博
雑誌名	国立防災科学技術センター 研究報告
巻	22
ページ	145-166
発行年	1979-01
URL	http://doi.org/10.24732/nied.00000807

国立防災科学技術センター研究報告　第22号　1979年10月

556.14:556.332.6

鉛直降雨浸透の有限要素法による一解法

——計算誤差の発生とその除去法——

大　倉　　博*

国立防災科学技術センター

An Analysis Method of Vertical Rainfall Infiltration by Finite Elements

—Derivation of Calculative Error and its Elimination—

By

Hiroshi Ohkura

National Research Center for Disaster Prevention, Japan

Abstract

The fundamental equation, based on Richards' theory of capillary potential and equation of continuity, of one dimensional infiltration

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial h}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

was solved after being transformed into simultaneous equations by the method of weighted residuals for space and the finite difference method for time. In the above, θ is volumetric water content; t is time; $K(\psi)$ is permiability for unsaturated soil; ψ is capillary potential; h is total potential; and z is vertical coordinate.

In order to apply the same equation in the saturated and unsaturated regions of over and under the ground-water surface, the equation (1) is changed into

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial h}{\partial z}\right), \qquad (2)$$

then equation (2) is transformed into popular simultaneous equations as unknown h_m^{i+1}

$$\left(a_{nm}^{i+1/2}+\frac{c_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t}\right)h_m^{i+1}=\frac{c_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t}h_m^i\ . \qquad (3)$$

In the above, Δt is interval of time step; superscript means time step; subscript means space position; the notations having one subscript are vectors; and the notation having two subscripts are matrices. When there appears a wetting front clearly in the analytic region, the solutions of equation (3) have a large error which causes a loss of water balance.

So as to eliminate the error, equation (1) is directly transformed with remaining θ, into

* 第4研究部計測研究室

$$a_{nm}^{i+1/2}h_m^{i+1}=\frac{d_{nm}}{\Delta t}(\theta_m^{i+1}-\theta_m^i)\,. \qquad (4)$$

But equation (4) cannot be solved by the reason of its non-convergency.

So equation (3) is solved after being mixed with equations (4), and the error of this solution is smaller than one hundredth of the error in case of equations (3) only.

1. 緒　　言

雨水の地中への浸透と地表面からの蒸発は，地表表層の土の性質に強く影響を受ける．表層の土は大部分不飽和であるから，土中の不飽和帯の水の挙動の解明は，農地の灌漑と排水の問題，河川の流出率と流出係数の決定に有力な情報を与える．

一般に，地下水の涵養は地下水面上の不飽和帯を通して行なわれるから，地下水の涵養機構の解明には不飽和帯の水の挙動の解明が必要になる．

土の力学的な強度は土中の含水率と間隙水圧に密接に関係し，土構造物・自然斜面の崩壊機構の解明も不飽和浸透を考慮しなければならない．

透水係数が毛管ポテンシャルの関数になるため，不飽和帯において流れを支配する運動方程式が非線形偏微分方程式になる．この非線形偏微分方程式の解析解を得ることは一般に困難であるため，電子計算機を用いた数値解析を行なって近似解を求めざるを得ない．

筆者はかつて降雨浸透の数値解析における有限要素法の有用性を述べ，事前に境界条件の定まらない境界とかなり強い非線形性を有する場合の解析法を定常鉛直二次元の解析例を用いて述べた（大倉，1977）．

非定常の場合は浸潤面の通過に伴う毛管ポテンシャルと含水率の急激な変化のため，数値解析に誤差が生じる．本研究ではこの誤差の発生と除去法について，非定常鉛直一次元の解析例を用いて述べる．

2. 浸透のモデル

降雨の鉛直浸透の基本式を導くにあたり，次の仮定（1)～5)）を設ける．

1) 土は一様，等方性である．
2) 土は時間・空間的に一定な物理的性質をもつ．
3) 水は時間・空間的に一定な接触角，粘度，密度をもつ．
4) 温度勾配による水の移動は無視する．
5) 土中の空気の移動と空気の圧力変化が土中水に与える影響は考えない．

このとき，Richards (1931) の式

$$\boldsymbol{q}=-K(\psi)\,\mathrm{grad}\,(h) \qquad (1)$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{q}$ は比流束，$K(\psi)$ は不飽和透水係数，ψ は毛管ポテンシャル（テンションともいう），h は総ポテンシャル（全水頭）である．(1) 式と連続の方程式より鉛直

一次元の浸透の基本式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial h}{\partial z}\right) \tag{2}$$

が得られる．ここで，θ は体積含水率（以下含水率という），t は時間，z は鉛直方向座標（上向き正）である．(2) 式は3個の未知数 θ,ψ,h を持つため解を得るには (2) 式の他に θ,ψ,h 間の2本の式が必要になる．ここに，仮定（6)～8)）を追加する．

6) 総ポテンシャル h は位置の座標 z と毛管ポテンシャル ψ の和

$$h=\psi+z \tag{3}$$

であらわされる（一般に右辺第2項は g を重力加速度として gz になるが本報告では圧力を水柱高で表わすため単に z とした）．ψ は不飽和域では $\psi<0$，自由水面上で $\psi=0$，飽和域で $\psi\geqq 0$ となる．また，自由水面下では ψ が水頭，h が全水頭をあらわすものとする．

7) 含水率 θ は毛管ポテンシャル ψ の関数

$$\theta=\theta(\psi)=\theta(h-z) \tag{4}$$

で，一般に θ は ψ に対してヒステリシスを有する．

8) 透水係数 K は飽和浸透に対する透水係数 K^s と比透水係数 K^r の積であらわされる．

$$K(\theta)=K^sK^r(\theta) \tag{5}$$

ここで，K^r は含水率 θ の一価関数とする．

境界条件は，境界からの流入量が既定されている境界では V を単位面積あたりの流入量として

$$K(\theta(\psi))\frac{\partial h}{\partial z}=NV \tag{6}$$

となり，総ポテンシャルが既定されている境界では h_0 を既定総ポテンシャルとして

$$h=h_0 \tag{7}$$

となる．ここで N は，境界が上端のとき $N=1$，下端のとき $N=-1$ になる．また，降雨強度が土の最終浸透能を越えないときは降雨強度を R とすると，地表で，$N=1$，$V=R$ であるから

$$K(\theta(\psi))\frac{\partial h}{\partial z}=R \tag{8}$$

となる．降雨が最終浸透能を越えるときは地表に湛水が生じることがある．湛水があるときは，h_R を湛水深とすると，(7) 式より地表で

$$h=h_R \tag{9}$$

となり，湛水がないときは (8) 式になる．しかし，本報告では，降雨強度が最終浸透能を越える場合は考えないものとする．

3.　重みつき残差法

土中水の鉛直一次元の浸透は (2), (3), (4), (6), (7) 式の境界値問題を解くことにより定量的に評価できる．しかし，この境界値問題は，K が θ の関数になり，θ が h の関数になるため非線形になり，特殊な場合を除いて解析解を得ることが困難になる．このため，境界値問題を時間・空間に離散化して，非線形連立方程式に変換した後，この連立方程式を解くことにより境界値問題の近似解を得る．この離散化にあたり，(2) 式を θ を未知数とする連立方程式に離散化する方法 (Klute, 1952) と，(2) 式を ψ または h を未知数とする連立方程式に離散化する方法がある．θ を未知数とする方法は仮定 2) と仮定 3) より飽和域で θ の変化が零になり，解析が不可能になる．このため飽和域と不飽和域を一括して扱い難たく不飽和域のみを解析の対象としている例 (Rubin, 1967: 山村・久楽, 1972) が多い．ψ または h を未知数とする方法は上記の欠点を持たないため多くの解析例 (Perrens, 1977: 赤井・大西・西垣, 1977) があるが，解析領域に浸潤面が明確に現われる場合に，水収支の誤差が生じる (後述)．

本報告では，h を未知数として，空間については重みつき残差法，時間については差分法 (中央差分) を用いて境界値問題を非線形連立方程式に変換する．

重みつき残差法 (Finlayson, 1972: 大島・毛利・中川, 1976) は以下のように説明される．

L を微分演算子として，領域 Γ において定義された次の微分方程式を考える．

$$L[h]=0 \tag{10}$$

この式に任意関数 W を掛けて領域 Γ について積分を行なうと

$$\int_{\Gamma} W\cdot L[h]d\Gamma=0 \tag{11}$$

となる．逆に任意関数 W に対して (11) が成立するならば関数 h は (10) 式の解になる．ここで，関数 h を適当な有限関数系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$, で展開できるものと仮定し，次式であらわす．

$$h=h_n\varphi_n \tag{12}$$

(以下，表の表現の簡便化を計るため，特にことわらないかぎり，右脚添字を添えた量は，脚添字が1個のものはベクトル，2個のものはテンソルをあらわし，さらに，式中の同一項に同じ脚添字をもつ量が繰返し現われるときは，その添字について総和をとるものとする)．同様に，W もまた適当な有限個の関数 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots$ からなる任意の線形結合 $W=w_n\omega_n$ と表わし，(11) 式に代入すると

$$w_n\int_{\Gamma} \omega_n\cdot L[h_m\varphi_m]d\Gamma=0 \tag{13}$$

となる．ここで w_n が任意定数であるから

$$\int_{\Gamma} \omega_n \cdot L[h_m \varphi_m] d\Gamma = 0 \tag{14}$$

が得られる．これは未定係数 h_m に関する n 元の代数方程式であり，これを解いて (12) 式に代入すると (10) 式の近似解 h が求められる．関数系 φ_n を試行関数，関数系 ω_n を重み関数といい，ω_n を特に φ_n に等しくおくものを Galerkin 法という．このとき h を比較関数，φ_n を基底関数ともいう．

4. 非線形偏微分方程式の離散化

(2) 式の未知数 h を基底関数 φ_n とその未定係数 h_n の有限級数

$$h = h_n(t)\varphi_n(z) \tag{15}$$

で近似する．$\varphi_n(z)$ は以下の手続きで求める．

図1に示すように z 軸上の解析流域（鉛直1次元）の全体を Γ とし Γ を適当な間隔で分割する．分割された流域を要素と呼び通し番号をつける．要素の境界点を節点と呼び，通し番号をつける．要素および節点の通し番号を下方より1から順番につけるものとする．また節点 n の座標を z_n とする．このとき，n 番目の要素（以下要素 n という）は，n 番目の節点（以下節点 n という）と節点 $n+1$ との間の区間と定義する．φ_n を

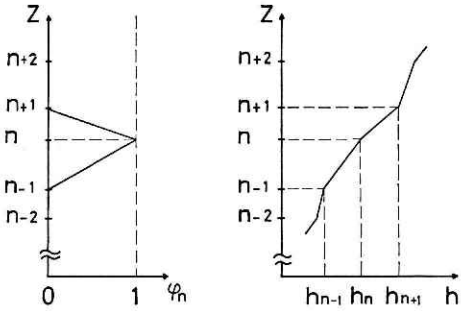

図 1 要素分割と基底関数 φ_n と比較関数 h
Fig. 1 Element divide, fundamental function φ_n and comparision function h for FEM.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(z) &= 0 && z > z_{n+1} \\ &= \frac{z - z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}} && z_{n+1} \geqq z > z_n \\ &= \frac{z - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} && z_n \geqq z \geqq z_{n+1} \\ &= 0 && z_{n-1} > z \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

と定義する．

このとき，$\varphi_n(z_n)=1$, $\varphi_m(z_n)=0$ $(m \neq n)$ となり，未定係数 h_n は節点 n 上の h の値になる．また，(15) 式は節点上の h の値を直線で連結する直線近似になる．θ と K も h と同様に

$$\theta = \theta_n(t)\varphi_n(z) \tag{17}$$

$$K = K_n(t)\varphi_n(z) \tag{18}$$

で近似する．

(2) 式の右辺を左辺に移項した後，基底関数 $\varphi_n(z)$ を乗じて全流域 Γ について積分する．

$$\int_{\Gamma}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right\}\varphi_n dz=0 \tag{19}$$

上式に（15), (16), (17), (18）式を代入して整理すると

$$d_{nm}\frac{\partial\theta_m(t)}{\partial t}-Q_n+a_{nm}h_m(t)=0 \tag{20}$$

ここで

$$a_{nm}=\int_{\Gamma}K_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\varphi_j d\Gamma \tag{21}$$

$$d_{nm}=\int_{\Gamma}\varphi_n\varphi_m dz \tag{22}$$

$$Q_n=V_n \tag{23}$$

ここで，$m=n-1, n, n+1$ 以外の a_{nm} と d_{nm} は零になる．Q_n は節点 n が流域内の流入量が既定される境界上にあるとき現われ，V_n がその単位面積あたりの流入量になる．Δt をタイムステップ，右肩添字 i をタイムステップ回数として，（20）式を時間について中央差分を用いて離散化すると

$$a_{nm}^{i+1/2}h_m^{i+1}=-\frac{d_{nm}}{\Delta t}(\theta_m^{i+1}-\theta_m^i)+Q_n^i \tag{24}$$

ここで

$$a_{nn}^{i+1/2}=\frac{1}{2}\frac{K^s(K_n^r)^{i+1/2}+K^s(K_{n-1}^r)^{i+1/2}}{z_n-z_{n-1}}+\frac{1}{2}\frac{K^s(K_{n+1}^r)^{i+1/2}+K^s(K_n^r)^{i+1/2}}{z_{n+1}-z_n} \tag{25}$$

$$a_{nn-1}^{i+1/2}=a_{n-1n}^{i+1/2}=-\frac{1}{2}\frac{K^s(K_n^r)^{i+1/2}+K^s(K_{n-1}^r)^{i+1/2}}{z_n-z_{n-1}} \tag{26}$$

$$d_{nn}=\frac{1}{2}(z_{n+1}-z_n)+\frac{1}{2}(z_n-z_{n-1}) \tag{27}$$

$$d_{nn-1}=d_{n-1n}=0 \tag{28}$$

$$(K_n^r)^{i+1/2}=\frac{1}{2}(K^r(\theta_n^{i+1})+K^r(\theta_n^i)) \tag{29}$$

$$\theta_n^i=\theta(h_n^i-z_n) \tag{30}$$

（22）式を計算すると（27）式と（28）式は

$$d_{nn}=\frac{1}{3}(z_{n+1}-z_n)+\frac{1}{3}(z_n-z_{n-1}) \tag{31}$$

$$d_{nn-1}=d_{n-1n}=\frac{1}{6}(z_n-z_{n-1}) \tag{32}$$

となるが，（27）式と（28）式に変更している．これは以下の理由による．タイムステップ i から $i+1$ における要素 $n-1$ の含水量の変化は，θ が節点 n 上の値 θ_n を直線で結ぶ直線近似であらわされるから，

$$\frac{1}{2}(z_n-z_{n-1})(\theta_{n-1}^{i+1}-\theta_{n-1}^{i})+\frac{1}{2}(z_n-z_{n-1})(\theta_n^{i+1}-\theta_n^{i})$$

$$=\frac{1}{3}(z_n-z_{n-1})(\theta_{n-1}^{i+1}-\theta_{n-1}^{i})+\frac{1}{6}(z_n-z_{n-1})(\theta_n^{i+1}-\theta_n^{i})$$

$$+\frac{1}{6}(z_n-z_{n-1})(\theta_{n-1}^{i+1}-\theta_{n-1}^{i})+\frac{1}{3}(z_n-z_{n-1})(\theta_n^{i+1}-\theta_n^{i}) \tag{33}$$

となる．(27), (28) 式の代りに (31), (32) 式を用いると，(24) 式の右辺第一項は単位時間における要素 $n-1$ と要素 n の含水量の減少量の離散化による節点 n への配分量

$$\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{1}{6}(z_n-z_{n-1})(\theta_{n-1}^{i+1}-\theta_{n-1}^{i})+\frac{1}{3}(z_n-z_{n-1})(\theta_n^{i+1}-\theta_n^{i})\right\} \tag{34}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{1}{3}(z_{n+1}-z_n)(\theta_n^{i+1}-\theta_n^{i})+\frac{1}{6}(z_{n+1}-z_n)(\theta_{n+1}^{i}-\theta_n^{i})\right\} \tag{35}$$

の和である．

(24) 式の左辺は単位時間の節点 n から節点 $n-1$ と節点 $n+1$ への浸透流量であるから，(24) 式は

(節点 n から隣接する節点への流出量)

=(節点 n に隣接する要素より配分された含水量の減少量)

+(節点 n が境界にあるときの境界からの領域への流入量)　(36)

を意味する．

今，浸潤前線が節点 n と節点 $n+1$ の間に到達し θ_{n+1} が増加中とする．このとき $(\theta_{n+1}^{i+1}-\theta_{n+1}^{i})/\Delta t$ は大きな値になる．(24) 式の n 番目の方程式に $(\theta_{n+1}^{i+1}-\theta_{n+1}^{i})/\Delta t$ が含まれるから，(24) 式の n 番目の方程式の右辺第1項は急に減少する．このときこの方程式を満たすためには，左辺の未知数 $h_{n-1}^{i+1}, h_n^{i+1}, h_{n+1}^{i+1}$ の係数の値がそれぞれ，負，正，負であるから h_{n-1}^{i+1} が急増または h_n^{i+1} が急減または h_{n+1}^{i+1} が急増しなければならない．もし，h_{n-1}^{i+1} が急増または h_n^{i+1} が急減すると，浸潤面の到達直前に総ポテンシャルが急変することになり矛盾が生じる．このため (31), (32) 式を (27), (28) 式と変更した．(33) 式から，変更された (27), (28) 式は各要素の含水量の変化を漏らさず，各要素の境界にある節点に配分していることがわかる．

非線形連立方程式 (24) 式は右辺に θ_m^{i+1} の項を持ち，きわめて収束性が悪いため一般に (20) 式を

$$d_{nm}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_m\frac{\partial h_m}{\partial t}-Q_n+a_{nm}h_m=0 \tag{37}$$

と変形した後に時間について離散化する．

$$\left(a_{nm}^{i+1/2}+\frac{c_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t}\right)h_m^{i+1}=\frac{c_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t}h_m^{i}+Q_n^{i} \tag{38}$$

$$c_{nn}^{i+1/2}=\frac{1}{2}(z_n-z_{n-1})\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_n^{i+1/2}+\frac{1}{2}(z_{n+1}-z_n)\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_n^{i+1/2} \tag{39}$$

$$c_{nn+1}^{i+1/2}=c_{n-1n}^{i+1/2}=0 \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_n^{i+1/2}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_{\psi=(\psi_n^{i+1/2}+\psi_n^i)/2} \tag{41}$$

$$\psi_n^i=h_n^i-z_n \tag{42}$$

(38) 式は右辺の $c_{nm}^{i+1/2}$ が h_m^{i+1} の関数であるにもかかわらず，(24) 式に比べ収束性が良い．これは，左辺の $\frac{c_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t}h_m^{i+1}$ により含水率の変化分が直接 h_m^{i+1} にフィードバックされるためである．しかし，h の時間変化率が大きいと (37) 式の解は計算誤差のため水収支関係を満足しなくなる．この誤差の発生を示すため，図2に仮の θ-ψ の関係を示す．タイムステップ i の ψ_n^i ($\psi_n^i=h_n^i-z_n$) が (38) 式を解くことにより，Δt 時間後に ψ_n^{i+1} になったとする．図2の SS' 曲線が節点 n の θ-ψ の関係を示す．(38) 式で見積られる節点 n による含水率の変化は

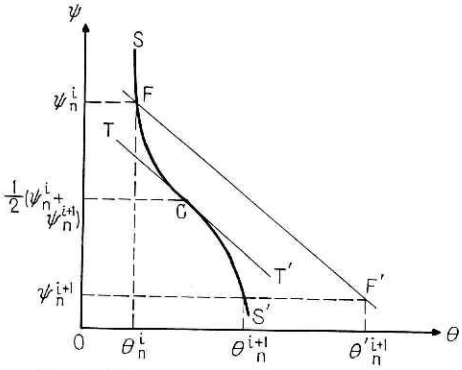

図 2 仮のヒステリシスカーブと数値計算の誤差の発生

Fig. 2 Schematical hysteresis curve and derivation of error.

$$\Delta\theta_n'^{i+1/2}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_n^{i+1/2}(h_n^{i+1}-h_n^i) \tag{43}$$

となる．$\Delta\theta_n'^{i+1/2}$ は図中の $\theta_n'^{i+1}-\theta_n^i$ であらわされる．直線 FF' はSS'上 の点 $C\left(\theta_n^{i+1/2},\frac{\psi_n^i+\psi_n^{i+1}}{2}\right)$ における接線 TT' に平行な点 F を通る直線であり，FF' の縦軸に対する傾きが $\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_n^{i+1/2}$ となっている．ところが，θ-ψ 関係を用いて ψ_n^{i+1} より算出される含水率は θ_n^{i+1} となり，時間ステップ i から $i+1$ への実際の含水率の変化は

$$\Delta\theta_n^{i+1/2}=\theta_n^{i+1}-\theta_n^i \tag{44}$$

となる．$\Delta\theta_n^{i+1/2}$ と $\Delta\theta_n'^{i+1/2}$ との差が累積して水収支の誤差が生じる．さらに，(38) 式は見積られた貯留量の変化に誤差が生じているので，(38) 式の解 h_n^{i+1} においても誤差が生じている．特に，シミュレーションの領域に浸潤面が現われると，この誤差が大きくなる．浸潤面の前後で ψ の差が大きく，浸潤面の通過に伴ない，通過地点の ψ が大きく変化するからである．この誤差を小さくするには Δt を十分に短かくすればよい．しかし，Δt を短かくすると，Δt に反比例して同一時間を数値解析するのに要するタイムステップが増大するため，Δt を変えずに誤差を小さくする方法を提案する．

収束性の良い一般的な(38)式を解き h_m^{i+1} を求め，得られた解が水収支を維持するかどうか

検査する．すなわち，全ての m について h_m^{i+1} から θ_m^{i+1} を算出し，ε を水収支の許容誤差とし，

$$\left|\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_m^{i+1/2}(h_m^{i+1}-h_m^i)-(\theta_m^{i+1}-\theta_m^i)\right|<\varepsilon \tag{45}$$

であるかどうかを検査する．検査に不合格な全ての m に対して，(38) 式の左辺第1項中の $\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)_m\cdot\frac{\partial h_m}{\partial t}$ を $\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_m$ にもどした後に，時間について離散化を行なうことにより (38) 式を水収支を維持するように修正する．修正された (38) 式の「求解」，「検査」，「方程式の修正」を，未修正の m に対して新たに (45) 式の検査の不合格が生じなくなるまで繰返し誤差の小さい解を得る．

(38) 式の修正は以下のようにすると簡単に行なわれる．収束性に欠ける (24) 式と一般的な (38) 式を混合した非線形連立方程式

$$A_{nm}^{i+1/2}h_m^{i+1}=B_n^{i+1/2} \tag{46}$$

$$A_{nm}^{i+1/2}=a_{nm}^{i+1/2}+(1-\alpha_m)\frac{c_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t} \tag{47}$$

$$B_n^{i+1/2}=\alpha_m\frac{d_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t}(\theta_m^{i+1}-\theta_m^i)+(1-\alpha_m)\frac{c_{nm}^{i+1/2}}{\Delta t}h_m^i \tag{48}$$

を作る．(47), (48) 式においては m についての積和はとらない．α_m は 0 または 1 の値を取るが，全ての α_m が 0 ならば (46) 式は (38) 式になり，全ての α_m が 1 ならば (46) 式は (24) 式になる．

全ての α_m を 0 とし (46) 式を解く，得られた解から θ_m^{i+1} を算出し (45) 式を検査する．検査に不合格な m に対する α_m に 1 を代入し (46) 式を修正する．(46) 式の求解，(45) 式の検査，(46) 式の修正を新らたに 1 が代入される α_m が生じなくなるまで繰返す．

5. 非線形連立方程式の解法

K が θ の関数，θ, $\frac{\partial\theta}{\partial\psi}$ が $h-z$ の関数になるから (46) 式は，係数 $A_{nm}^{i+1/2}$ と定数項 $B_n^{i+1/2}$ が h_m^{i+1} の関数となり，非線形連立方程式になる．このため，始めに h_m^{i+1} を仮定し線形計算の繰返しにより逐次 h_m^{i+1} の修正を行ない，(47) 式の解を得る．さらに得られた解が水収支を十分な精度で維持するかどうかを検査する．検査に合格したときは次のタイムステップに進む．不合格のときは合格するまで，水収支を維持するように (46) 式の修正と修正された方程式を解くことを反復する．以下解法のアルゴリズムを述べるが，特に断わらないかぎり順を追って実行するものとする（図3参照，本文および図3における「:＝」は右辺の値を左辺の変数に代入することを意味する）．

操作 1 初期値を設定し，タイムステップのサフィックス i に 1 を代入する．

操作 2 全ての n に対して，1 タイムステップ前の h_n^i を h_n^{i+1} の仮の値 $h_n'^{i+1}$ に代入する．

操作 3 始めに比較的収束性の良い (38) 式を解くために，全ての n に対して $\alpha_n=0$ とする．

操作 4　連立方程式の修正反復回数のカウンター k に 1 を代入する．

操作 5　k が連立方程式の許容反復回数 k_e より小さいかまたは等しいかどうかを検査する，不合格ならば解が得られないものとして計算を打切る．

操作 6　h_n^i と仮に定めた $h_n'^{i+1}$ を用いて，(46) 式の係数 $A_{nm}^{i+1/2}$ と定数項 $B_n^{i+1/2}$ を計算する．

操作 7　操作 6 で作成した連立 1 次方程式 (46) 式

$$A_{nm}^{i+1/2}h_m^{i+1}=B_n^{i+1/2} \qquad (49)$$

を解く．

操作 8　操作 7 で求めた h_n^{i+1} と操作 6 で用いた $h_n'^{i+1}$ との差の絶対値を求め，差の絶対値が許容誤差 ε_h よりも小さいかどうかを検査する．全ての n が検査に合格するならば現時点の α_m に対する連立方程式（水収支を満足するとはかぎらない）が解けたものとして操作 11 に飛び越す．

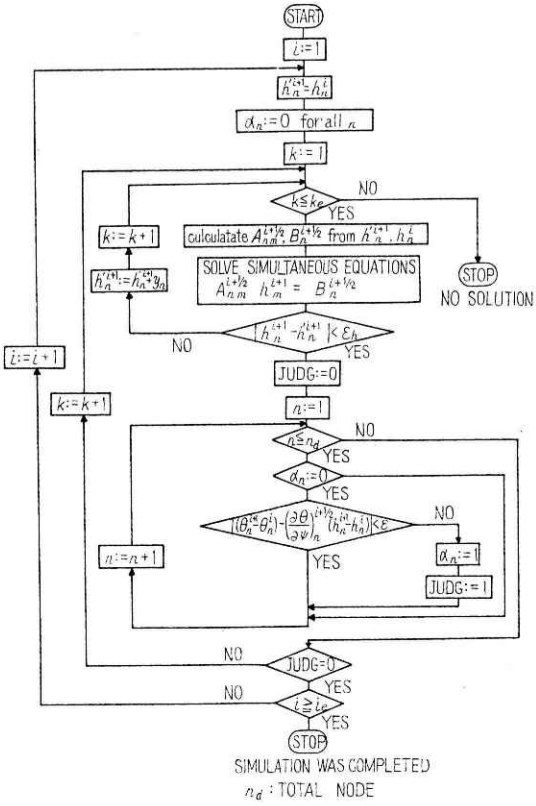

図 3　解法アルゴリズムの流れ図
Fig. 3　Flow chart of argorithm to solve.

操作 9　(46) 式の収束解が得られるように $h_n'^{i+1}$ を

$$h_n'^{i+1}:=h_n'^{i+1}+y_n \qquad (50)$$

と修正する．y_n を求める方法は（大倉，1977）による．その理論は付録に加えてある．

操作 10　連立方程式の修正反復回数カウンター k を 1 繰上げる．操作 5 に飛び越す．

操作 11　$\alpha_n=0$ なる全てのに n 対して，ε を許容誤差として

$$\left|(\theta_n^{i+1}-\theta_n^i)-\left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi}\right)_n^{i+1/2}(h_n^{i+1}-h_n^i)\right|<\varepsilon \qquad (51)$$

を検査する．不合格ならば α_n に 1 を代入する．ここで，α_n を 0 から 1 に変えることにより (46) 式は水収支をより良く満たす (24) 式に自動的に修正される．

操作 12　操作 11 において新たに 1 が代入された α_n がないことを検査する ($JUDG=0$ を検査すればよい)．合格ならばタイムステップ $i+1$ の水収支を満足する解が得られたものとする．検査が不合格ならば連立 1 次方程式の修正回数のカウンター k を 1 繰上げ操作 5 に飛び越す．

操作 13 i_e をシミュレート終了時間に対応するタイムステップとして，シミュレート終了時間に達している（$i \geq i_e$）かどうかを検査する．合格すれば，シミュレート完了として計算を終了する．不合格ならば i を 1 つ繰上げ次のタイムステップの解を求めるために操作 2 に飛び越す．

6. 数値計算例および考察

モデルの検証のために，実験と数値計算との対比を行なった．しかし，検証実験とは別個に土の物理定数，たとえば，K^r と θ，θ と ϕ との関係を算定しておらず，この対比は物理定数の同定ともいえる．一般的な（38）式（以後，一般方式という）を用いた数値計算結果と本報告で新しく提案された（47）式（以後，新方式という）を用いた数値計算結果を検証実験と比較する．物理定数の同定は一般方式の結果が検証実験に一致するようにし，この物理定数を新方式の数値計算にも流用したため，一般方式の方が新方式より検証実験に良く一致している．しかし，一般方式による数値計算例は水収支関係を満足せず，一般方式による降雨浸透のシミュレーションは誤差を伴う危険性を持つ．

1) 検証実験

検証実験は科学技術庁国立防災科学技術センターの大型降雨実験施設において行なわれた（富永，1978）．図 4 に示される 4 槽に区切られている土槽（各槽の寸法はタテ×ヨコ×タカサ，240 cm×240 cm×240 cm）を作成し，各槽に供試土としてそれぞれ粗砂（粒径 0.5–2.0 mm），細砂（粒径 0.0–0.5 mm），関東ローム土，鹿沼土を充塡した（本報告のモデルの検証は細砂のみで行なわれている）．土槽には，地下水面が土槽上端から下方 170 cm に位置するようにドレインパイプが設定されている．なお，各層の底部に層厚 40 cm の砕石層を置き，ドレインパイプの土槽側開孔端付近に生じる水平方向の浸透流が供試土中の鉛直浸透に影響しないようにした．測定項目は，降雨量，毛管ポテンシャル，体積含水率，土の電気比抵抗，地下水の水位，地下水の流出量の 6 項目である（図 5）が，数値計算およびその検証に用いるものは，次の 4 項目である．

i) 転倒枡雨量計による降雨量：降雨強度・降雨継続時間はあらかじめ設定されるが設定条件の実現を確認する．

ii) テンシオメーターによる

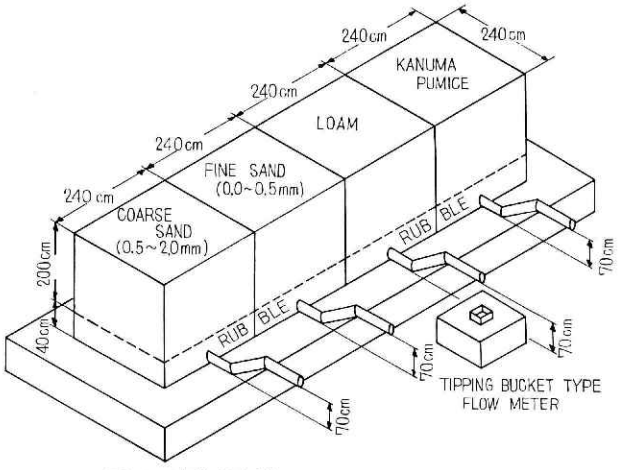

図 4 実験用土槽
Fig. 4 Large scale ground models (lysimeter).

土中各部の毛管ポテンシャル：テンシオメーターのポーラスカップは供試土の表面より −5 cm, −10 cm, −20 cm, −40 cm, −60 cm, −80 cm, −120 cm, −160 cm の8点に埋設されている．測定時間間隔は，降雨継続中は8点につきおおよそ5分，その他はテンションの変化の緩急により変えている．

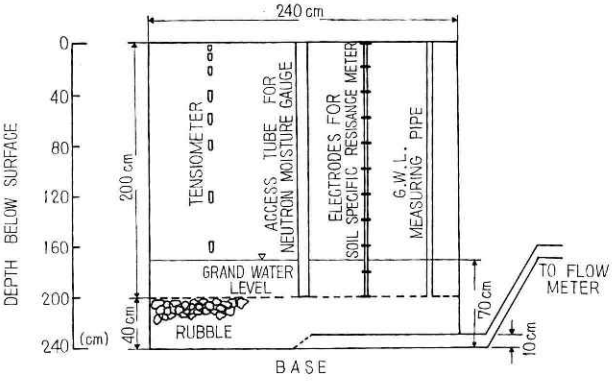

図 5　計測器配置図
Fig. 5　Location of measuring instruments.

iii) 中性子水分計による土中各部における体積含水率：測定位置は供試土の表面より −10 cm, −20 cm, −40 cm, −60 cm, −80 cm, −100 cm, −120 cm, −160 cm, −180 cm であり，測定時間間隔はおおよそ30 分以上である．

iv) ドレインパイプから流出する地下水流出量：転倒枡流量計により自動計測する．

本報告の数値計算は細砂の場合に限られている．この検証実験は，土槽に砂細を充填し，一年間養生した後に行なわれた．図6に実験の結果（降雨量と地下水流出量 (A)，深さごとのテンションの時間変化 (B)，時間－深さ空間における総ポテンシャルの等値線 (C)）を示す．

30 分間 50 mm/h の降雨が継続した後，30 分間休止することを3回繰返す間歇的な雨を設定して実験を行なった．しかし，第1波，第2波，第3波の雨は，ピーク値がそれぞれ 41.5 mm/h, 55.5 mm/h, 50.5 mm/h となり，ばらついている．総降雨量は 72.8 mm，降雨継続期間 1.5 時間に対する平均降雨強度は 48.5 mm/h である．

地下水流出は，降雨開始後 240 分に始まり，350 分でピーク値 8.8 mm/h に達し，780 分までの地下水の流出高は 35.7 mm になる．地下水流出の時間変化が滑らかにならないのは，測定に用いた転倒枡流量計の転倒枡 (1 l) が大きすぎるためである．

含水率とテンションの値は正の相関関係がある．よって，図6 (B) のテンションの曲線の下降は浸潤過程，上昇は排水過程をあらわす．

深さ，−20 cm, −40 cm, −60 cm, −80 cm, −120 cm のテンションのそれぞれ 12 分，90 分，140 分，170 分，252 分における急激な増加は浸潤前線の到達をあらわす．

浸潤面が完全に通過した，−5 cm, −10 cm −20 cm では，間歇的な雨に応じてテンションの値が変化し，その振幅は深くなるにつれて小さくなる．

第3波の降雨が終了するまでに浸潤面が通過している部分では降雨の終了とほとんど同時に排水過程が始まっている．この排水によるテンションの回復は表層に近いほど早い．（こ

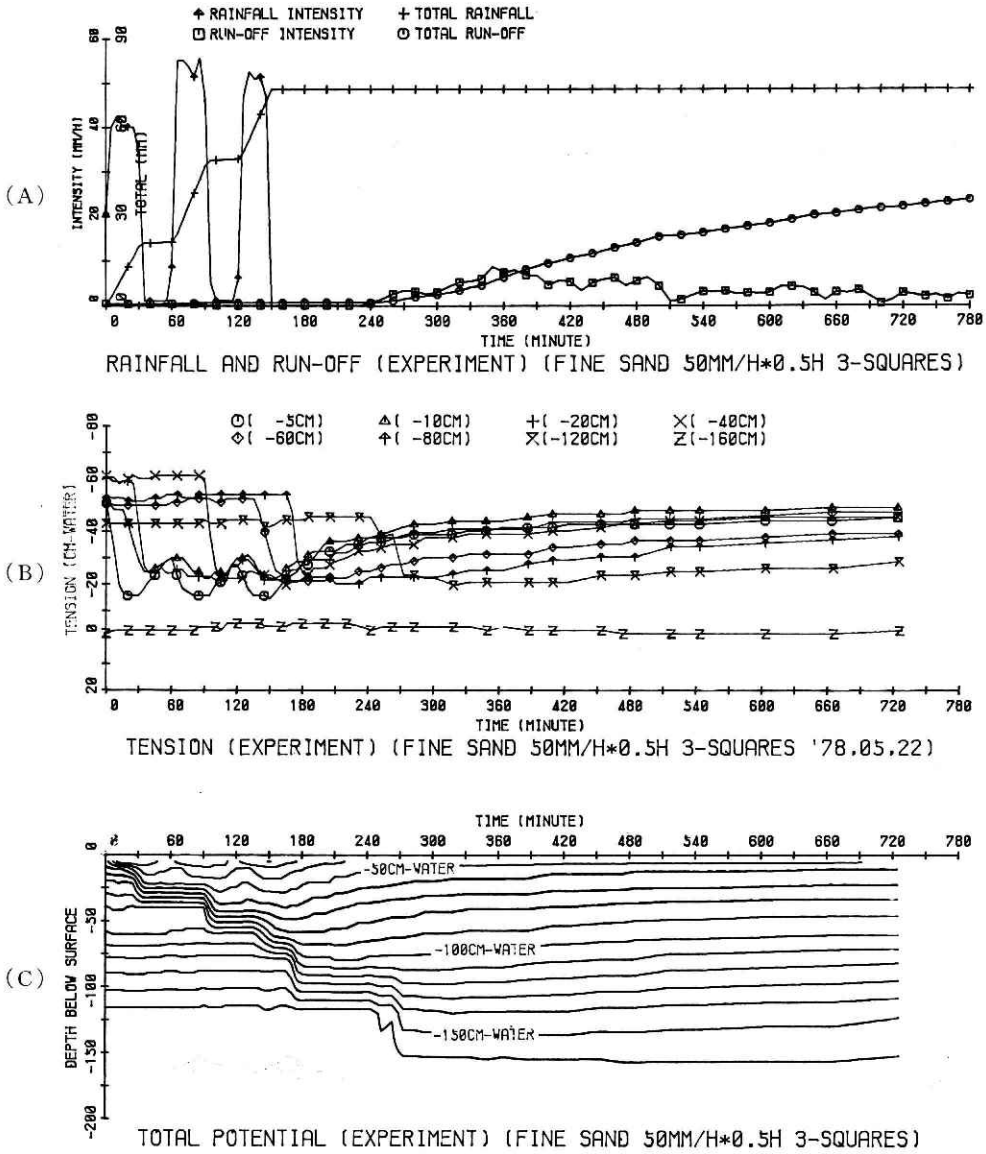

図 6 実験結果（降雨と地下水流出(A)．テンション (B)．総ポテンシャルの等値線 (C)）

Fig. 6 ResultS of experiment.
Rainfall and ground-water run-off (A). Tension (B). Contours of total potential (C).

の −5 cm のテンションの時間変化を後述する数値計算結果と比較すると，実験の −5 cm のテンションの値は約 6 cm-H_2O の測定誤差を持つと推定される．−5 cm のテンションの曲線を縦方向に 6 cm H_2O 上方に平行移動すれば −5 cm のテンションの回復が最も早くなる）．

総ポテンシャルの等値線 (C) において，浸潤面の降下は原点から斜め右下方に階段状に伸びる等値線の間隔の狭い部分であらわされる．この浸潤面の降下をあらわす部分が階段状に

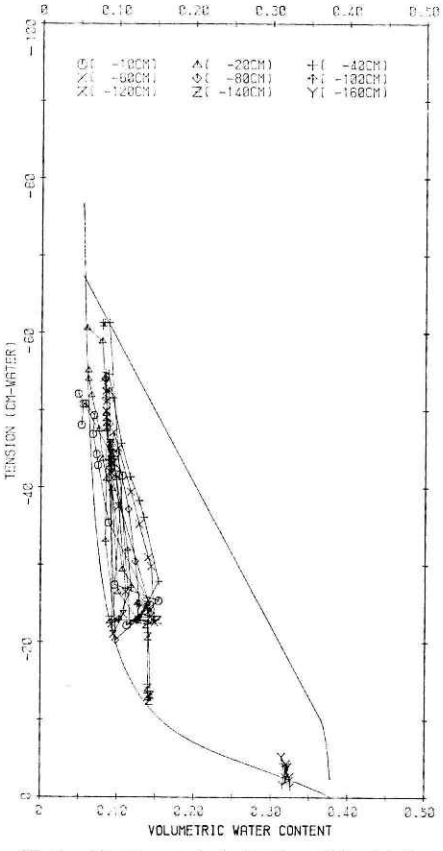

図 7　テンションと含水率との関係（実験結果）

Fig. 7　Relationship between suction and volumetric water content.

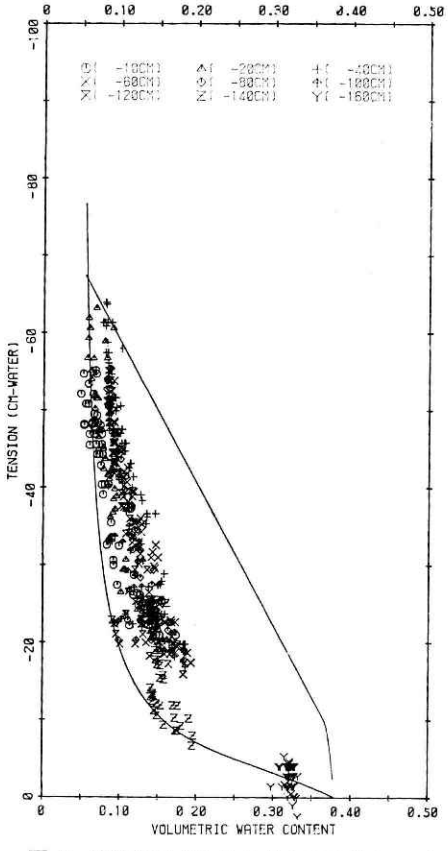

図 8　実験によるヒステリシスの主ループの推定

Fig. 8　Estimation of main loop of hysteresis from experiment results.

なるのは，時間のサンプリングに対して空間（深さ）方向のサンプリングが荒いためである．

図7に検証実験のテンションと含水量との関係を示す．土中各部の同一時刻の θ と ψ を時刻を変えて θ-ψ 平面にプロットしている．θ-ψ の関係はヒステリシスを有し，図中の曲線はヒステリシスの主ループ（後述）である．

2)　物理定数

図8に数値計算に用いるヒステリシスの主ループと，ほぼ一週間間隔で行なわれた5回の実験の同一時刻同一地点の θ と ψ のプロットを示す．これらの実験の（降雨強度)×(降雨継続時間）はそれぞれ，15 mm/h×6 h，30 mm/h×6 h，50 mm/h,×6 h，30mm/h×1 h の後 70mm/h×1 h，50mm/h×0.5 h が1時間のサイクルで3回繰返す間歇的な雨である．図中の曲線がプロットされた点から推定したヒステリシス主ループである．前述の5回の実験の降雨強度はいずれも細砂の最終浸透能（10^2～10^3 mm/h）に比べ僅小なため，排水過程の主ループを推定する θ と ψ がプロットされない．このため排水過程のヒステリシス主ループ

は Mualem による砂質土と砂のヒステリシス主ループ (Mualem, 1974; Mualem, 1977) を参考に推定した．ヒステリシスの主ループが定められると Mualem モデル (Mualem, 1974) を用いて，主ループ間の走査線が決定され，θ-ψ と $(\partial\theta/\partial\psi)$-$\psi$ の関係が得られる．ただし，飽和域では Mualem モデルが用いられず，一般に

$$\theta=\theta_u+(n\beta+\alpha)\psi \tag{52}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=n\beta+\alpha \tag{53}$$

となる．ここで，θ_u は飽和域で $\psi=0$ における体積含水率，n は土の空隙率，α は圧密などによる土の間隙率の変化，β は水の体積弾性率である．しかし，1章の仮定 2) と 3) より $\alpha=0/\mathrm{cm\ H_2O}$, $\beta=0/\mathrm{cm\ H_2O}$ となる．θ_u と n は共に，$\theta_u=0.38$, $n=0.38$ とした．

飽和透水係数 K^s は検証実験の供試土をサンプリングして室内透水試験を行ない，$K^s=1.4$ cm/min の値を得た．しかし，数値実験と検証実験との対比により $K^s=6.0$ cm/min とした．

K^r と θ との関係は Irmay の3乗則 (Irmay, 1954)

$$K^r=\left(\frac{\theta-\theta_v}{\theta_u-\theta_v}\right)^3 \qquad \theta\leqq\theta_u \tag{54}$$

$$=1 \qquad \theta>\theta_u \tag{55}$$

を用いた．ここで，θ_v は最小容水量である．降雨開始直前には，前回の実験よりほぼ1週間経過し，地下水の流出強度がほとんど零になる．この状態では懸水帯の水はほとんど移動せず，この懸水帯の θ は最小容小量になると考えた．ただし，地表付近の θ は蒸発による乾燥のため最小容水量より小さい値になると考え，深さ -60 cm の θ の値を用いることにした．各実験の降雨開始直前の深さ -60 cm の θ は 0.06～0.08 になるが，$\theta_v=0.08$ と推定した．このときの θ と K^r の関係を図6に示す．

3) 要素分割と境界条件とタイムステップ

供試土の表面（以下，地表面という）から供試土の最下端（以下，最下端という）までを解析領域とする．検証実験において表面が土槽上端より約 5 cm 沈下していた．この沈下した表面を鉛直座標 z の基準点とすると，供試土の最下端（土槽上端より -200 cm）は $z=-195$ cm になる．また，土槽下底の砕石層における浸透の圧力損失が無視出来るものとすれば，最下端の総ポテンシャルは $-165\ \mathrm{cm\ H_2O}$ になる．よって，境界条件は

$$h=-165\ \mathrm{cm\ H_2O} \qquad \text{at} \quad z=-195\ \mathrm{cm}, \tag{56}$$

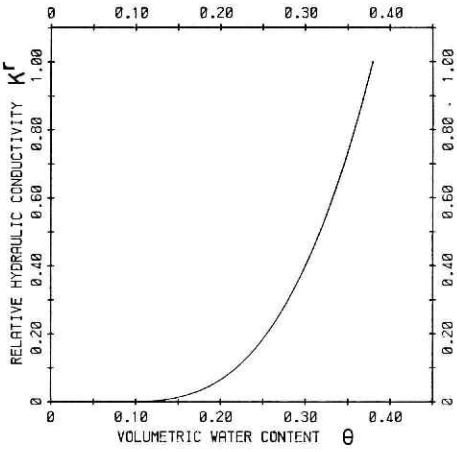

図 9 比透水係数 K^r の体種含水率 θ による変化

Fig. 9 Variation of relative hydraulic conductivity K^r with volumetric water content θ.

降雨強度 R が最終浸透能より小さいから

$$K^s K^r(\theta)\frac{\partial h}{\partial z}=R \qquad \text{at} \quad z=0\,\text{cm} \tag{57}$$

となる.

節点間隔とタイムステップ間隔は電子計算機の解析プログラムの占有容量が小さく，かつ演算時間が短かくなるように検証実験の精度を損なわない限り大きくすることにした．テンシオメーターの最小設置間隔が 5 cm なので，地表面から最下端まで節点間隔 $\Delta x=5$ cm で節点を設けた．このとき，節点総数は 40，要素総数は 39 になる.

検証実験のテンシオメーターの最小読取間隔が 5 分であることからタイムステップ $\Delta t=5$ 分とした．計算不安定をおこさないためには，一般に $\Delta z/\Delta t$ が解析する現象の伝播速度より大きいことが必要である．浸潤前線の降下速度は（降雨強度）×（降雨継続時間）が 50 mm/h×6 h の実験において 0.7 cm/分であった．検証実験の浸潤前線の降下速度は，降雨強度が 50 mm/h であるが間歇的な降雨のため 0.7 cm/分を越えない．$\Delta z=5$ cm，$\Delta t=5$ 分とすると $\Delta z/\Delta t=1$ cm/分となり浸潤前線の降下速度より大きくなる.

非線形連立方程式を解くために必要な収束判定許容誤差は $\varepsilon_h=0.0002$ cm H_2O，水収支許容誤差 $\varepsilon=0.00004$ とした.

4)　初期条件

φ, θ, K と $\partial\theta/\partial\psi$ の初期値が必要であるが，$K, \partial\theta/\partial\psi$ は φ と θ より計算で求められるので，φ と θ の初期値が必要である．θ と φ の初期値は検証実験の実験開始直前の測定値を用いた.

5)　数値計算結果

4 章において定義した d_{nm} を変更せずに (31), (32) 式を用いた場合の計算結果を図 10 に示す．浸潤面の通過に伴ない上流（上方）に隣接する節点の θ が急激に増大するため，

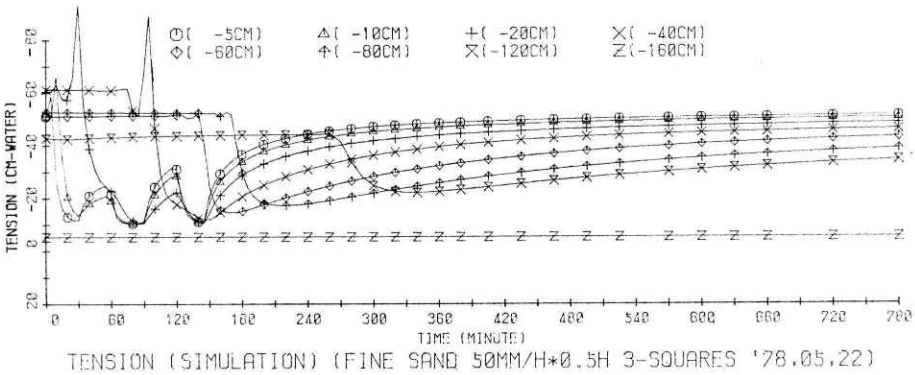

図 10　実験結果に反する数値計算例
連立 1 次方程式の d_{nm} を変更しない場合

Fig. 10　Example of simulation which violates experimental results.
The results without modifying coefficient d_{nm} of simultaneous equations.

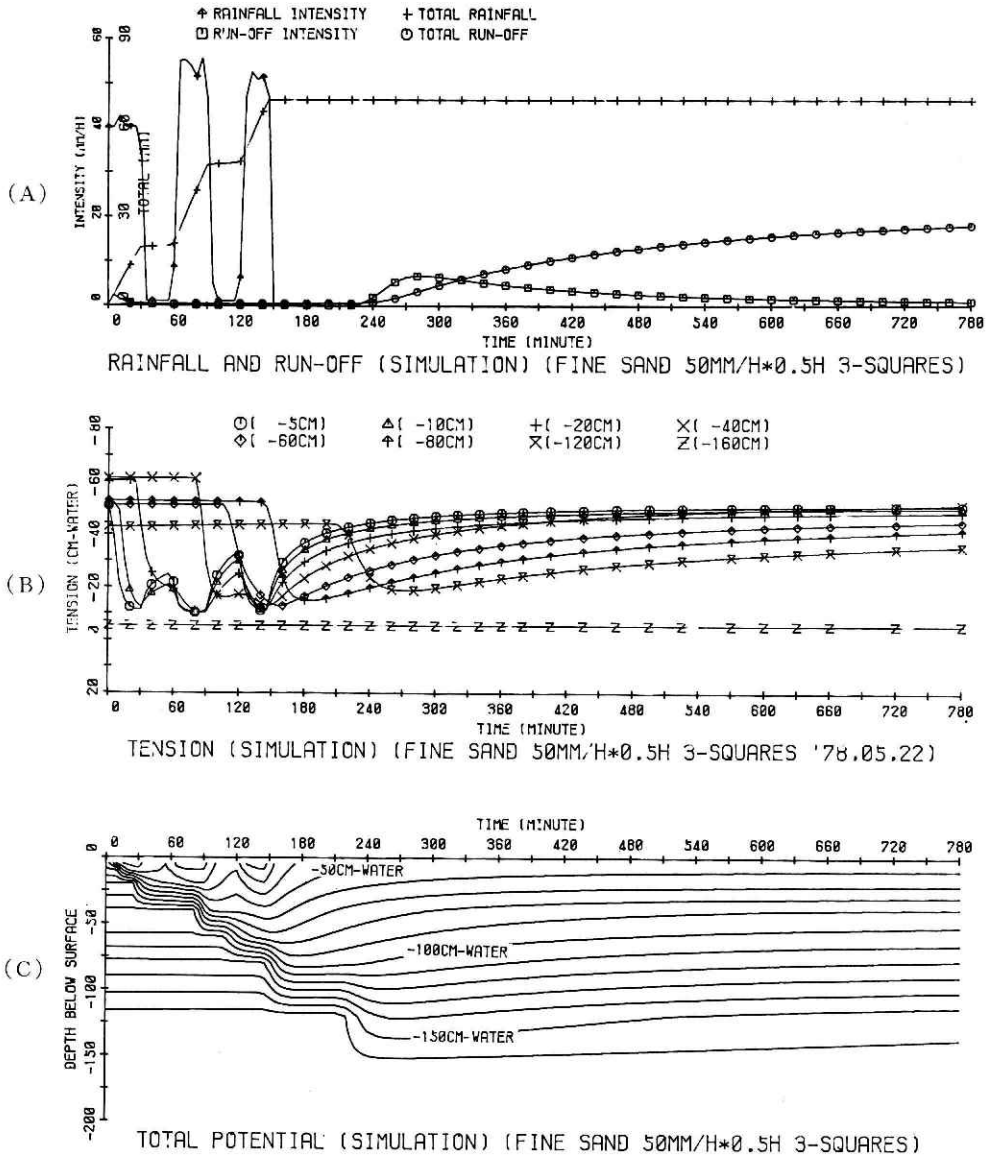

図 11 一般方式による数値計算結果
降雨と地下水流出 (A). テンション (B), 総ポテンシャルの等値線 (C)

Fig. 11 Simulation results of popular method.
Rainfall and ground-water run-off (A). Tension (B). Contours of total potential (C).

ϕ が一時的に減少することがわかる.

d_{nm} を変更して, 一般的な (38) 式を用いた一般方式の計算結果を図 11 に示し, 本報告で提案された (46) 式を用いた新方式の計算結果を図 12 と図 13 に示す. 一般方式の結果が新方式の結果より検証実験に良く一致している. 新方式では浸潤前線の降下が一般方式のものより早くなっている. これは以下の理由による. 湿潤過程において, ヒステリシスの主ル—

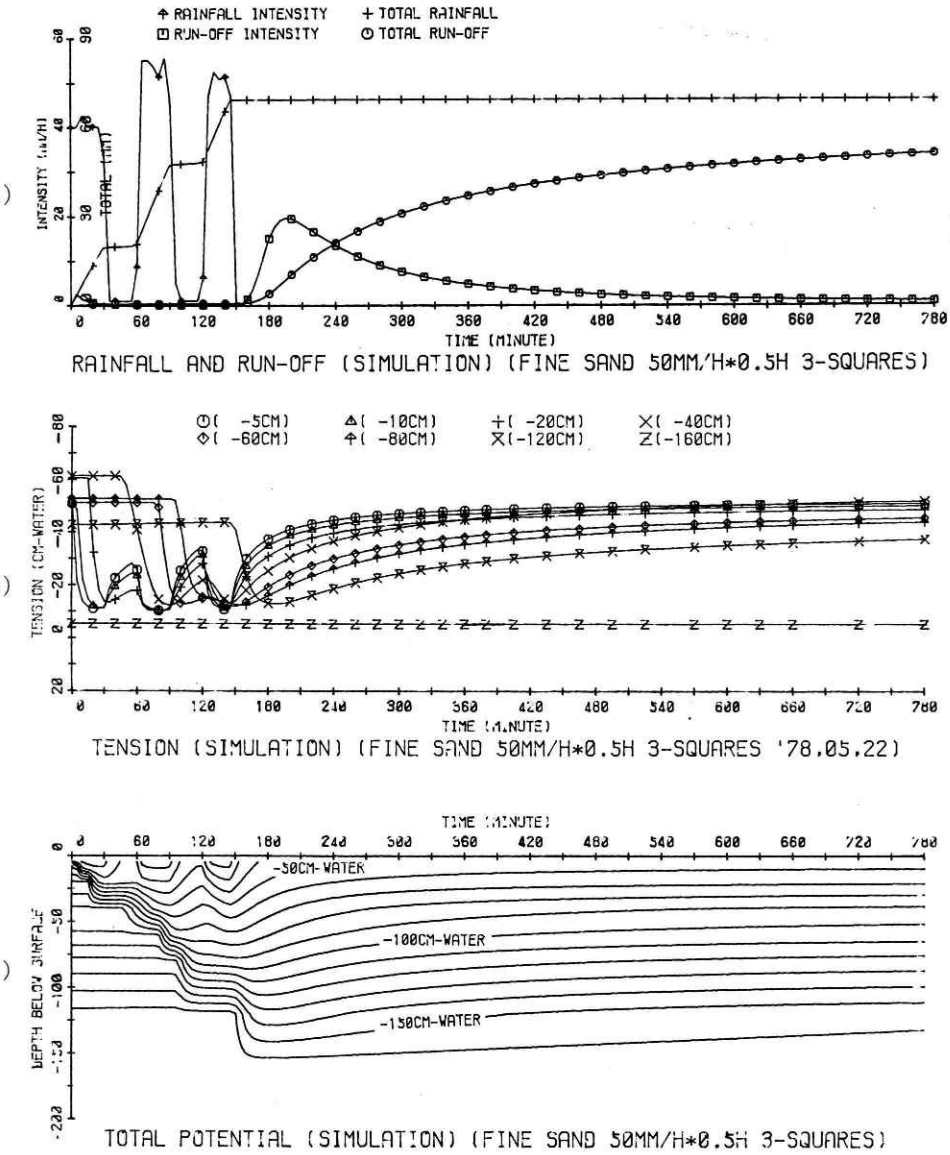

図 12　新方式による数値計算結果
降雨と地下水流出 (A), テンション (B), 総ポテンシャルの等値線 (C)

Fig. 12　Simulation results of new method.
Rainfall and ground-water run-off (A).　Tension (B).　Contours of total potential (C).

プまたは走査線が図2の SS' 曲線であらわされ，節点 n が図2の F 点にあり，浸潤前線が要素 n を通過中としよう．新方式と一般方式の h_n^{i+1} の変化に対する含水率の変化の見積りは新方式の方が小さくなる．このとき新方式 ((46) 式) の解 h_n^{i+1} が一般方式 ((38) 式) の解より大きくなるから新方式の θ_n^{i+1} も一般方式のそれよりも大きくなり，新方式の $(K_n^r)^{i+1/2}$ も一般方式のものより大きくなる．節点 $n-1$ と節点 n の全ポテンシャルの差 $h_n^{i+1}-h_{n-1}^{i+1}$

は新方式によるものが一般方式より大きく（節点 $n-1$ にはまだ浸潤面が到達していない），さらに節点 $n-1$ と節点 n との間の透水係数 $1/2\times(K^s(K_n^r)^{i+1/2}+K^s(K_{n-1}^r)^{i+1/2})$ も新方式が一般方式より大きくなる．ゆえに，新方式のタイムステップ i での節点 n から節点 $n-1$ への浸透量が多くなり，浸潤前線の降下が早くなる．

新方式の解は検証実験の以下の現象 i), ii), iii) を満す．

i) 浸潤前線の通過によりテンションが急激に増加する．

ii) 第3波の降雨開始以前に浸潤面が完全に通過した部分において，テンションは間歇的な雨に応じて変動し，その振幅は深くなるにつれて小さくなる．

iii) 第3波の降雨が終了するまでに浸潤面が通過している部分では，降雨の終了とほとんど同時に排水過程が始まり，さらに，排水によるテンションの回復は表層に近いほど早い．

しかし，新方式の解の以下の定量的な5項目が検証実験と良い一致をみない．a) 浸潤前線の降下速度．b) 浸潤面通過後のテンションの値，c) 地下水流出の開始時刻．d) ピーク流出時刻．e) ピーク流出強度．

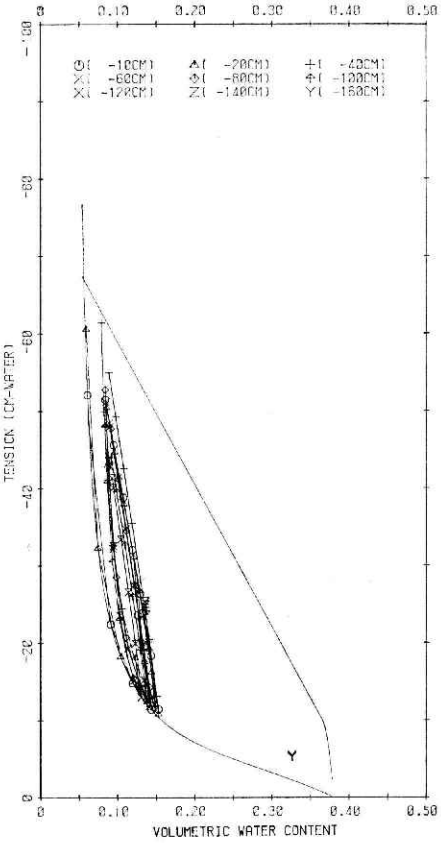

図 13 テンションと含水量との関係 新方式による数値計算結果

Fig. 13 Relationship between suction and water content (simulation of new method).

図 14 に新方式と一般方式の水収支の誤差の時間変化をあらわす．降雨強度が最終浸透能を越えないとき，蒸発を無視すれば，各時刻において

(降雨量)＋(土中の初期水分量)＝(土中の水分量)＋(地下水流出量)

が成り立たなければならない．P を降雨量，DM を土中の水分量の初期水分量との差，G を地下水流出量とし，水収支の誤差 ERROR を

$$\mathrm{ERROR}=|P-DM-G| \tag{58}$$

で定義する．このとき，各時刻において ERROR＝0 になる．数値解析においては丸めの誤差などのため ERROR は零にならないが，零に近い値にならなければならない．ERROR の大小により，数値解析のモデルと解法アルゴリズムを評価できる．図 14 において新方式の ERROR は $t=5$ 分（第1ステップ）で 0.00087 mm，$t=780$ 分（第 156 ステップ）で

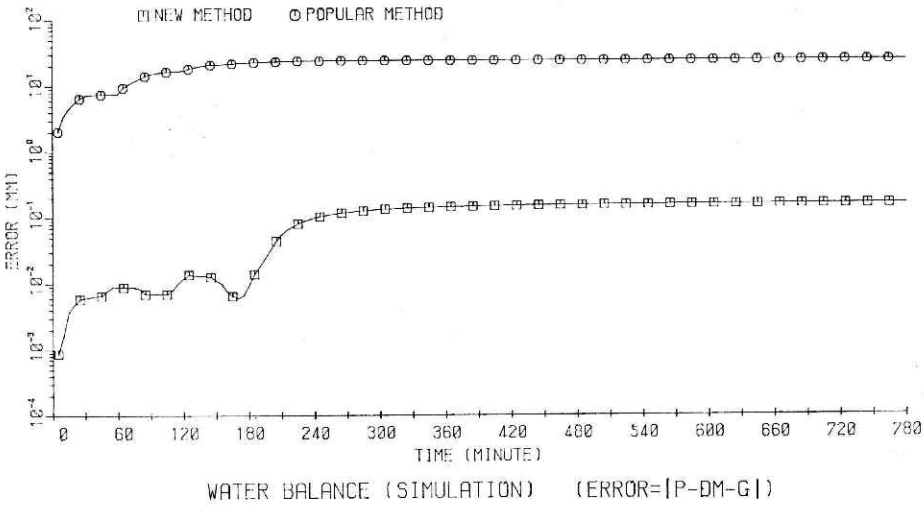

図 14　水収支の誤差の累積
P: 降雨量，*DM*: 土中の水分量の初期値との差，*G*: 地下水流出量

Fig. 14　Cumulation of error derived from loss of water balance.
P: rainfall amount, *DM*: decrement of amount water in soil from initial amount, *G*: ground-water run-off amount.

0.16 mm になる．これに対して，一般方式の ERROR は $t=5$ 分で 2.0 mm，$t=780$ 分で 23.7 mm になるから，新方式の水収支の誤差が一般方式の 1/100 以下になる．総降雨量が 72.8 mm であるから，一般方式の水収支の誤差は降雨量の 33% に及んでいる．なお，土中の初期含水量は 290 mm であった．

一般方式による数値計算例は，流出量とテンションと全ポテンシャルが検証実験に良く一致しているにもかかわらず水収支が満たされていない．このため一般方式による計算例と検証実験とを土層各部の含水量の変化について比較するとあまり良い一致がみられないことが予想される．本報告の数値計算例は，一般方式による計算結果のテンションと地下水流出量が検証実験に一致するように物理定数を同定しこの物理定数を新方式に流用したため，新方式の計算結果は検証実験と良い一致をみない．しかし，今後，新方式により物理定数を同定すれば，より精度の良い物理定数と数値計算結果が得られると思われる．数値実験による不確定なパラメータの同定には数値実験の多角検討が必要である．また，このパラメータを用いた数値予測は適用範囲に細心の注意を要する．

7.　結　　語

降雨浸透を土中の飽和－不飽和域にわたり解析する計算誤差の小さい数値解析法を提案した．提案された解析法の計算誤差より発生する水収支の誤差は，本報告の解析例では，従来の解析法の誤差の 1/100 以下であった．

大型水理実験の実験結果と数値解析結果との比較により，数値解析法の検証を行なった．

提案された数値解析法は検証実験の次の現象（i), ii), iii)）を表現している．

i) 浸潤面の通過に伴うテンションの急激な増加.

ii) 浸潤面が到達している部分において，降雨強度の変動に伴うテンションの変動は表層ほど大きく，深くなるに従って減衰する．

iii) 浸潤面が到達している部分では雨が止むとほとんど同時にテンションが回復し始める．また，テンションの回復する速度は表層に近いほど早い．

ただし，数値解析結果の次の定量的な事項（iv), v), vi)）が検証実験と良い一致をみない．

iv) 浸潤面の降下速度，地下水流出開始時刻，地下水流出ピーク時刻.

v) 地下水流出のピーク流出強度.

vi) 浸潤面通過後のテンションの値.

これらの定量的事項の不一致は従来の解析法により同定した物理定数の一部（K-θ, ϕ-θ の関係）を流用したためである．今後，これらの物理定数をより正確に同定すれば，提案された数値解析法で，iv), v), vi) の定量的な現象もより精度よく解析できると思われる．

従来の方法による解析結果は水収支に大きな誤差（誤差は総降雨量の 33%）があるにかかわらず，vi) を除いて検証実験の結果によく一致している．このように致命的欠陥を持ちながら，ある一面で検証実験によく一致する場合があり，不確定なパラメータを有する現象の数値実験はパラメータの同定と数値実験の適用範囲に細心の注意を払わなければならない．

検証実験は科学技術庁特別研究促進費・地下水の水収支の解析手法に関する総合研究「水理模型実験による地下水の基本的特性に関する研究」のもとに行なわれた．

謝　　辞

検証実験において，テンションの測定に援助していただいた，国立防災科学技術センター第3研究部佐藤照子氏，同第4研究部御子柴正氏の両氏に感謝の意を表します．

参 考 文 献

1) 赤井・大西・西垣（1977）：有限要素法による飽和－不飽和浸透流の解析，土木学会論文報告集，第 264 号．87-96.

2) Finlayson, B. A. (1972): The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York.

3) Irmay, S. (1954): On the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils, *Trans.* Agu, Vol. **35**, No. 3, 463-467.

4) Klute, A. (1952): A Numerical Method for Solving the Flow Equation for Water in Unsaturated Materials, *Soil Sci.*, **73**, 105-116.

5) Mualem, A. (1974): A Conceptual Model of Hysteresis, *Water Resources Research*, Vol. **10**, No. 3, 514-520.

6) Mualem, A. (1977): Extension of the Similarity Hypothesis Used for Modeling the Soil Water

Characteristics, *Water Resouces Research*, Vol. **13**, No. 4, 773-780.

7) 大倉　博 (1977): 不飽和浸透を考慮した降雨浸透の有限要素法による一解法——定常流——，国立防災科学技術センター研究報告，第 **18** 号，51-72.

8) 大島・毛利・中川 (1976): 大気汚染制御のための汚染濃度予測の一方式，生産研究，**28** 巻，3 号，76-82.

9) Perrers, S. J., Watson, K. K. (1977): Numerical Analysis of Two-Dimensional Infiltration and Redistribution, *Water Resources Research*, Vol. **13**, No. 4, 781-790.

10) Richards L. A. (1931): Capillary Conduction of Liquids through porous Mediums, Physics, Vol. **1**, 318-333.

11) Rubin, J. (1967): Numerical Method for Analyzing Hysteresis-Affected, Post-Infiltration Redistribution of Soil Moisture, *Soil Sci. Am. Proc.*, Vol. **31**, 13-19.

12) 富永雅樹 (1978): 地下水の涵養推定のための水理実験 (1)，国立防災科学技術センター報告，第 **20** 号，123-134.

13) 山村・久楽 (1972): 堤防への浸透と堤体の安全性，土木研究所報告 145 号の 3，41-71.

付録　非線形連立方程式の近似解と真の解との誤差を近似的に求める方法.

係数 A_{nm} が未知数 h_j $(j=1,2,\cdots,m,\cdots,n,\cdots)$ の単調連続関数となる準線型連立一次方程式

$$A_{nm}(h_j)\cdot h_m=B_n(h_j) \tag{A.1}$$

を考える（以下，特にことわらないかぎり，式中の同一項に同じ添字をもつ量が繰返し現われるときは，その添字について総和をとるものとする）．近似解を h'_j とし，h'_j と真の解 h_j との誤差を y_j とする．

$$h_j=h'_j+y_j \tag{A.2}$$

(A.1) 式の h_j に h'_j を代入し，x_m を未知数とする連立一次方程式

$$A_{nm}(h'_j)\cdot x_m=B_n(h'_j) \tag{A.3}$$

を解くと，x_m は h'_j の関数となる．

$$x_m=x_m(h'_j) \tag{A.4}$$

上式の h'_j に h_j を代入すると，x_m の定義より，

$$h_m=x_m(h_j)=x_m(h'_j+y_j) \tag{A.5}$$

となる．(A.5) を y_i について Taylar 展開して y_i の二次以上の項を無視すると

$$h_m=x(h_j+y_j)\fallingdotseq x_m(h'_j)+\frac{\partial x_m}{\partial h'_i}y_i \tag{A.6}$$

上式と (A.2) 式より，誤差 y_j は連立方程式

$$a_{mj}y_j=b_m \tag{A.7}$$

$$a_{mj}=\frac{\partial x_m}{\partial y_j}-\delta_{mj} \tag{A.8}$$

$$b_m=h'_m-x_m(h'_j) \tag{A.9}$$

を解いて近似的に求められる．ここで，δ_{mj} はクロネッカーのデルタをあらわす．β を適当な定数として，$h'_j+\beta y_j$ を新たに h'_j として反復を繰返すと，h'_j の h_j への収束が予想される．

(1979 年 6 月 22 日　原稿受理)