不飽和浸透を考慮した降雨浸透の有限要素法による一解法－定常流－

著者	大倉 博
雑誌名	国立防災科学技術センター 研究報告
巻	18
ページ	51-70
発行年	1977-11
URL	http://doi.org/10.24732/nied.00000754

556.14:556.332.342

不飽和浸透を考慮した降雨浸透の有限要素法による一解法

—— 定　常　流 ——

大　倉　　博*

国立防災科学技術センター

An Analysis Method of Saturated-Unsaturated Steady Flow from Rainfall by Finite Elements

By

Hiroshi Ohkura

National Research Center for Disaster Prevention, Japan

Abstract

A saturated-unsaturated steady flow of soilwater and grounwater from rainfall is formulated as a boundary value problem of nonlinear partial differential equation of elliptic type. On the raining surface and seepage out surface, there are annoying boundaries which cannot be arranged boundary conditions a priori. Overcoming the nonlineality and the unfixed boundary conditions, the boundary value problem is transformed into nonlinear simultaneous equations by Galerkin finite element method, and an alogorithm for solving the nonlinear simultaneous equations is proposed. By the algorithm constituted of iterative method, considerably strong nonlinear problems can be solved. This suggests that there are many applications of this algorithm to simulate nonlinear phenomena which can be transformed into nonlinear simultaneous equations.

1. 緒　　言

堤防やロックフィルダムなどの土構造物内の浸透流の解析や地下水の解析に際し，不飽和浸透を考慮すると複雑になるため，飽和浸透だけを考慮した報告が多い（駒田・金沢，1975; Kono, 1974; Neuman, 1971; 山上・小田 1975).

不飽和浸透では毛管現象により負圧が生じ，この負圧が土構造物内の浸透流や地下水の流れに影響を与えるため，不飽和浸透を無視し得ない場合が生じる．

* 第4研究部計測研究室

自然斜面の崩壊は斜面土中の含水率の分布に密接に関係し，斜面を構成する土の大部分が不飽和でも崩壊が発生することがある．このため，自然斜面の崩壊機構の解明を念頭に置き含水率の分布を浸透流の解析より求めるには，不飽和浸透を考慮しなければならない．

植物の根に接する土壌は不飽和の場合が多く，農地の灌漑と排水の問題も不飽和浸透を無視できない．

不飽和浸透が雨水の地盤への浸透の大部分を担う場合があり，水文学の流出解析における流出率の決定にも不飽和浸透の解析は有為な情報を与える．

不飽和浸透を考慮すると，透水係数が飽和度により異なるため，流れを支配する運動方程式は非線形偏微分方程式になる．さらに，自由水面が存在する不圧流れでは湧出点などの位置が事前に定まらず，事前に境界条件を既定できない境界が存在する．このため，流れを支配する方程式の解析解を得ることが困難になる．解析的手法に代わる非線形偏微分方程式を基礎にする数値近似計算法として差分法と有限要素法が挙げられる．有限要素法は，差分法に比べ境界条件の処理が容易なため，境界条件の変更が生じるときに有利になる．さらに，材料の異方性，部分的不均一性も容易に扱える．このため，有限要素法は，降雨による土中の飽和・不飽和浸透流への有力な解析手法となる．

本報告で述べる解析法は，降雨による土中水と地下水の不飽和・飽和定常浸透流をラプラス型非線形偏微分方程式の境界値問題に定式化し，これを有限要素法を用いて非線形連立方程式に離散化した後，得られた非線形連立方程式を解いている．

境界値問題への定式化において，地下水・土中水の湧出する境界の範囲と雨水の浸透する境界の境界条件が事前に定まらない．すなわち，ラプラス形偏微分方程式の境界条件が第1種の境界条件か，第2種の境界条件かが既定されない．この障害は非線形連立方程式を反復法で解く過程で処理されている．非線形連立方程式を解くにあたり，非線形性が強く一般の反復解法（赤坂 (1967)）で解が得られない場合でも，新しく提案された反復解法を用いて収束解を得た．

2. 浸透のモデル

図1に示す定常浸透問題を例にとる．x_i はデカルト座標をあらわし，x_3 を鉛直方向座標とする（以下，式の表現の簡便化を計るため，特にことわらないかぎり，右脚添字を添えた量は，脚添字が1個のものはベクトル，2個のものはテンソルをあらわす．さらに，式中の同一項に同じ添字をもつ量が繰返し現われるときは，その添字について総和を取るものとする）．Ω は土中の流れの領域（不飽和域も含む）をあらわす．Γ と Λ は浸透流域の境界をあらわし，1が添字されると全水頭 h が既定されている境界（楕円型偏微分方程式の第1種境界条件）を，2が添字されると浸透水の領域内への流入量が既定されている境界（第2種境界条件）をあらわす．Γ は事前に「全水頭が既定されている」か「流入量が既定されて

いるか」が定まっている境界をあらわし，Λは事前にそれらが定められない境界をあらわす．H, V, R はそれぞれ既定全水頭，単位時間・単位面積あたりの既定流入量，降雨強度をあらわす．

全水頭 h を未知数とし，h を求めるために次の仮定を設ける．

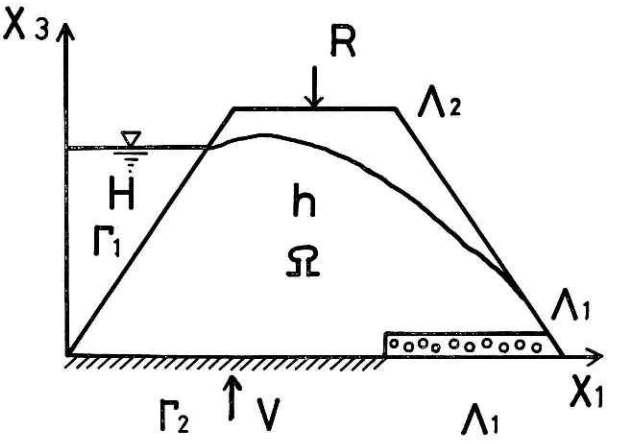


図 1 解析領域の断面図
Fig. 1 Cross Section of Analysis Region

1) 水は非圧縮性とする．

2) 全水頭は，ϕ を圧力水頭として

$$h = h(x_i) = \phi + x_3 \tag{1}$$

であらわされる．ϕ は，飽和領域で $\phi>0$，自由水面上で $\phi=0$，不飽和域では $\phi<0$ となる．

3) 浸透流は，飽和・不飽和域を問わず，ダルシー則

$$q_i = -K_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j} \tag{2}$$

に従う．ここで，q_i は x_i 方向のダルシー流速を，K_{ij} は透水係数をあらわす．透水係数 K_{ij} は飽和浸透に対する透水係数 K^s_{ij} と比透水係数 K^r の積であらわされる．

$$K_{ij} = K^s_{ij}K^r(S) \tag{3}$$

ここで，K^r は飽和度 S の一価関数とする．

4) 飽和度 S は，圧力水頭 ϕ の一価非減少関数で

$$S = S(\phi) = S(h - x_3) \tag{4}$$

ただし，$\phi\geqq 0$ のとき $S=1$ とする．

5) 境界面からの蒸発は考えない．

6) Λ_1, Λ_2 境界で浸透不能な雨水と Λ_1 境界より湧出した水は瞬時に流れ去る．

7) Λ_1 境界では全水頭 h がその x_3 座標に等しく，水の単位時間・単位面積あたりの流入量は，単位面積に降る降雨強度を越えない．

8) Λ_2 境界では単位時間・単位面積あたりの流入水量が単位面積あたりの降雨強度に等しく，全水頭 h はその点の x_3 座標値を越えない．

仮定 7), 8) について説明を加える．事前に「全水頭が既定されている」か「流入量が既定されている」かが定まらない Λ 境界では，仮定 6) より湛水が生じないので流入水量は単位面積あたりの降雨強度以下になり，さらに，圧力水頭は負または零，すなわち全水頭 h はその x_3 座標値を越えない．Λ 境界における全水頭と流入水量との状態の組合わせを考えると，仮定 7), 8) の他に，次の組合せが考えられる．「単位時間・単位面積あたり流入量は降雨強度より少なく，全水頭は x_3 座標より小さい．」ところが，流入量が降雨強度よりも少ないときは Λ 境界に浸透できない雨水が存在（瞬時に流れ去る）するから境界では飽和度 $S=1$ となり，仮定 2), 4) より $h=x_3$ となり矛盾する．故に，Λ 境界では仮定 7), 8) 以外の状態の組合わせは生じない．

3. 流れを支配する方程式と境界条件

定常流を考え，水の非圧縮性とダルシー則を考慮すると，連続の式から次式が求まる．

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}^s K^r(S)\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)=0 \tag{5}$$

境界条件は，境界 Γ_1 において

$$h=\mathrm{H}, \tag{6}$$

境界 Γ_2 において

$$n_i K_{ij}^s K^r(S)\frac{\partial h}{\partial x_j}=\mathrm{V}, \tag{7}$$

ここで，n_i は境界の外向き単位法線ベクトルの i 方向成分をあらわす，
境界 Λ_1 において，

$$h=x_3, \tag{8}$$

境界 Λ_2 において

$$n_i K_{ij}^s K^r(S)\frac{\partial h}{\partial x_j}=n_3\mathrm{R}, \tag{9}$$

となる．

4. 非線形偏微分方程式の離散化

有限要素法は，変分原理に基づき流れを支配する微分方程式と等価な汎関数を導き，この汎関数の極小化を基礎とする．しかし，非線形微分方程式は等価な汎関数が存在しない場合や，存在が不明な場合が多い．かかる場合にガレルキン法を用いると汎函数を求めなくとも，有限要素法による非線形境界値問題の解析が可能になる．

(5) 式の未知数 h を変分法の比較関数とし，h を未知係数 h_m と基底関数 $\varphi_n(x_i)$ の有限級数

$$h(x_i) = h_n\varphi_n(x_i) \tag{10}$$

で近似する．ここで，$\varphi_n(x_i)$ は以下の手続で求める．流域を図2に示すように3節点1次A要素（藤野 (1972)）に分割し各々に通し番号をつける．以下，x_2 方向に領域と境界条件が一定とし，x_1, x_3 平面の垂直2次元問題を考える．番号 n の節点（以下節点 n とする）を頂点とする三角要素よりなる多角形（図2の斜線部分）の領域を $\bar{\Omega}_n$ とする．$\varphi_n(x_i)$ は x_i の連続関数で節点 n 上で1，多角形 $\bar{\Omega}_n$ の辺上と外側で0と定義する．このとき，節点 n 上で $h=h_n$ となり，h_n が節点 n における全水頭をあらわす．

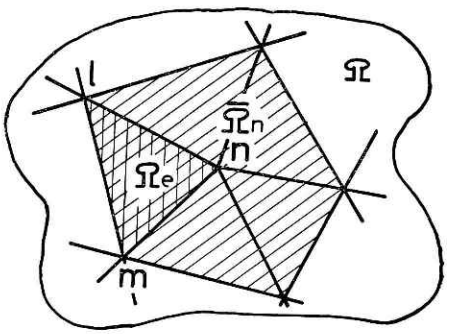


図2 要素分割
Fig. 2 Network of Triangular Elements

Ω_e を Ω_n に含まれる要素番号 e の要素（以下，要素 e と呼ぶ）の領域とすると

$$\bar{\Omega}_n = \bigcup_e \Omega_e \tag{11}$$

φ_n も同様に

$$\varphi_n = \bigcup_e \varphi_{ne} \tag{12}$$

であらわす．ここで，φ_{ne} は Ω_e 内で一価連続，Ω_e の外で零となる関数である．φ_{ne} の具体的な関数形は付録2で示す．

(10) 式が (5)～(9) 式の境界値問題を最良に近似する係数 h_n を決定するために，ガレルキン法を用いると

$$\iint_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}^s K^r(S) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \cdot \varphi_n \right\} d\Omega = 0 \tag{13}$$

となり，(10) 式を代入して整理すると

$$\sum_e \iint_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}^s K^r(S) h_m \frac{\partial \varphi_{me}}{\partial x_j} \right) \right\} \varphi_{ne} d\Omega = 0 \tag{14}$$

となる．S_e で要素 e の重心の飽和度をあらわし，要素 e 内で $K^r(S)$ を一定

$$K_e^r = K^r(S_e) \tag{15}$$

とし，グリーンの第1定理を用いると (14) 式は

$$\sum_e \left\{ \int_{\Gamma_{e2}} n_i K_{ij}^s K_e^r h_m \frac{\partial \varphi_{me}}{\partial x_j} \varphi_{ne} d\Gamma + \int_{\Lambda_{e2}} n_i K_{ij}^s K_e^r h_m \frac{\partial \varphi_{me}}{\partial x_j} \varphi_{ne} d\Lambda - \iint_{\Omega_e} K_{ij}^s K_e^r h_m \frac{\partial \varphi_{me}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{ne}}{\partial x_j} d\Omega \right\} = 0 \tag{16}$$

となる．ここで，中括弧内の第1項と第2項はそれぞれ節点 n が Γ_2, Λ_2 境界上にあるとき

現われ，積分範囲 Γ_{e2} と Λ_{e2} はそれぞれ要素 e の節点 n を含み Γ_2，Λ_2 境界と一致する辺である．φ_{ne} の定義（付録2）により，(16) 式を整理すると

$$A_{nm}h_m = Q_n{}^{\Gamma_2} + Q_n{}^{\Lambda_2} \tag{17}$$

$$A_{nm} = \sum_e K_{ij}^S K_e{}^r \iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_{ne}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{ne}}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

$$= \sum_e \frac{1}{4\Delta} K_e{}^r \{ K_{11}^S b_{ne} b_{me} + K_{13}^S (b_{ne} c_{me} + b_{me} c_{ne}) + K_{33}^S c_{ne} c_{me} \} \tag{18}$$

$$Q_n{}^{\Gamma_2} = \sum_e \int_{\Gamma_{e2}} \mathrm{V} \varphi_{ne} d\Gamma \tag{19}$$

$$Q_n{}^{\Lambda_2} = \sum_e \int_{\Lambda_{e2}} \mathrm{R} n_3 \varphi_{ne} d\Lambda \tag{20}$$

ここで，Δ, b_{ne}, c_{ne}, b_{me}, c_{me} と φ_{ne} は付録2を参照．Γ_1, Λ_1 境界上にある既知水頭にダッシュをつけると，境界値問題 (5)～(9) 式は，未知水頭 h_m の連立方程式

$$A_{nm}h_m = B_n \tag{21}$$

$$B_n = Q_n{}^{\Gamma_2} + Q_n{}^{\Lambda_2} - A_{nk}h_k{}' \tag{22}$$

に離散化される．ここで添字 m, n は未知節点水頭だけを取ることに注意されたい．

5. 非線形連立方程式の解法

K^r が S の函数，S が $h-x_3$ の函数となるから，(21) 式は，係数 A_{nm} が h_m の函数となり，非線型連立方程式になる．節点 n が Λ_1 境界上にあると添字 n に対する (21) 式が消失し，Λ_2 境界上にあると (22) 式右辺第2項が現われる．また，節点 k が Λ_1 境界にあると右辺第3項が現われる．よって，Λ_1, Λ_2 の範囲が (21) 式の解 h_m に大きな影響を与える．故に，(21) 式を解くには Λ_1, Λ_2 の範囲が事前に定まらねばならない．しかし，2章 7), 8) より Λ_1, Λ_2 の範囲を定めるには h，すなわち (21) 式の解が必要となり矛盾する．この矛盾を克服するため，始めに h_m と Λ_1, Λ_2 の範囲を仮定し，線形計算の繰返しにより逐次 h_m, Λ_1, Λ_2 の範囲の修正を行ない (21) 式の解を得る．

以下解法のアルゴリズムを述べるが，特に断わらないかぎり順を追って実行するものとする（図3参照）．

操作 1　h_m の値と Λ_1, Λ_2 の範囲の第0次近似 $h_m{}^0$, $\Lambda_1{}^0$, $\Lambda_2{}^0$ を仮定する（以下，右肩添字は反復回数をあらわす）．

操作 2　i_e を許容反復回数として

$$i \leqq i_e \tag{23}$$

を判定する．成立しないときは，収束解が得られないものとして計算を打切る．

操作 3　$h_m{}^{i-1}$, $\Lambda_1{}^{i-1}$, $\Lambda_2{}^{i-1}$ を用いて (18), (19), (20), (22) 式より (21) 式の係数 A_{nm} と定数項 B_n を求め，それぞれ A_{mn}^{i-1}, $B_m{}^{i-1}$ とする．

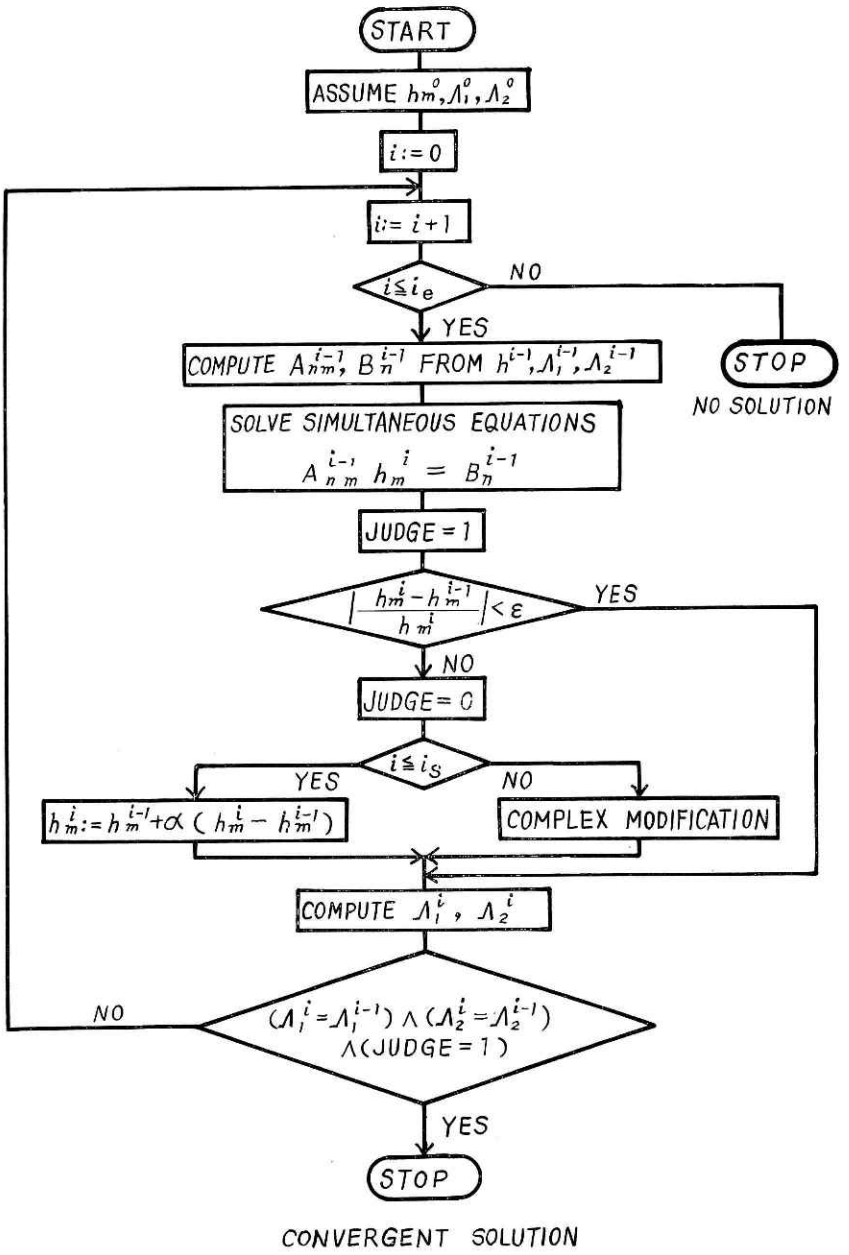


図 3 解法アルゴリズムの流れ図
Fig. 3 Flow Chart of Algorithm to Solve

操作 4 連立1次方程式

$$A_{mn}^{i-1} h_m^{\ i} = B_n^{\ i-1} \tag{24}$$

を解く.

操作 5 ε を許容誤差として，全ての m に対して

$$\left|\frac{h_m{}^i - h_m{}^{i-1}}{h_m{}^i}\right| \leqq \varepsilon \qquad (h_m{}^i \neq 0) \tag{25}$$

$$|h_m{}^i - h_m{}^{i-1}| \leqq \varepsilon \qquad (h_m{}^i = 0) \tag{26}$$

を判定する，全ての m に対して成立するときは，操作9へ飛越する．

操作 6　i_s を許容単純反復回数 $(i_s \leqq i_e)$ として

$$i \leqq i_s \tag{27}$$

を判定する．成立しないときは操作8へ飛越する．

操作 7　α を適当な係数として，すべての m に対して

$$h_m{}^i := h_m{}^{i-1} + \alpha(h_m{}^i - h_m{}^{i-1}) \tag{28}$$

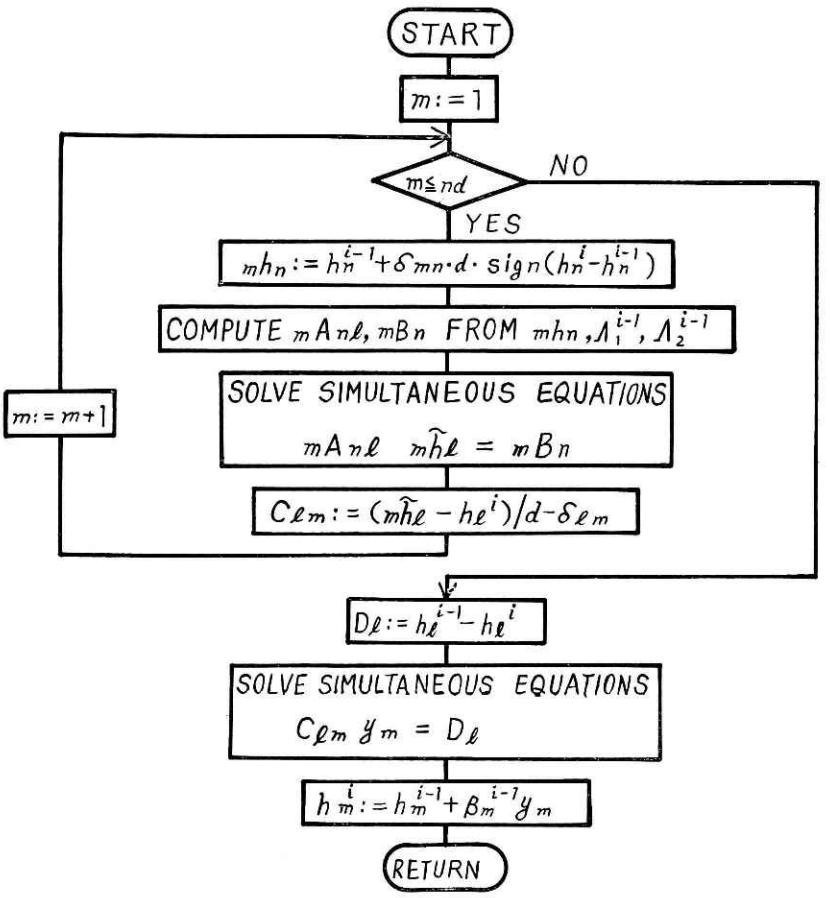


図 4　Complex Modification の流れ図（解法アルゴリズムの流れ図の一部）
Fig. 4　Flow Chart of Complex Modification.　(A part of "Flow Chart of Algorithm to Solve")

を計算した後，操作9へ飛越する．以下，「:=」は右辺を計算した後に左辺に代入することを意味する．

操作 8

a）ベクトル ${}_m\boldsymbol{h}$ の第 n 成分 ${}_mh_n$ を次式より求める（以下，操作8は図4参照）

$$ {}_mh_n := h_n^{i-1} + \delta_{mn} \cdot d \cdot \mathrm{sign}\,(h_n^{i} - h_n^{i-1}) \tag{29} $$

ここで，δ_{mn} はクロネッカーのデルタ，d は定数，$\mathrm{sign}\,(Z)$ は Z の符号をあらわす．

b）${}_mh_n$ と Λ_1^{i-1}，Λ_2^{i-1} を用いて，操作3と同様に (21) 式の A_{nl} と B_n を求め ${}_mA_{nl}$，${}_mB_n$ とする．

c）${}_m\tilde{h}_l$ を未知数とする連立1次方程式

$$ {}_mA_{nl}\,{}_m\tilde{h}_l = {}_mB_n \tag{30} $$

を解く．ここで m について総和は取らない．

d）C_{lm} と D_l を次式より求める．

$$ C_{lm} := ({}_m\tilde{h}_l - h_l^{i})/d - \delta_{lm} \tag{31} $$

$$ D_l := h_l^{i-1} - h_l^{i} \tag{32} $$

e）y_m についての連立1次方程式

$$ C_{lm} y_m = D_l \tag{33} $$

を解く．

f）β^{i-1} を適当なベクトルとして

$$ h_m{}^{i} := h_m{}^{i-1} + \beta^{i-1} y_m \tag{34} $$

を計算する．

操作 9 $h_m{}^{i}$ を用いて Λ_1^{i}，Λ_2^{i} を求める（図3参照）．

操作 10 $\Lambda_1^{i} = \Lambda_1^{i-1}$ かつ $\Lambda_2^{i} = \Lambda_2^{i-1}$ が成立し，かつ操作5が満されているならば，$h_m{}^{i}$ を連立方程式の収束解として計算を終了する．満されないときは操作2へ飛越し次回の反復を繰返す．

以上がアルゴリズムの概要である．以下，説明の不十分な操作に説明を加える．

操作4と操作8の連立1次方程式，(24) 式と (30) 式はラプラス型偏微分方程式 (5) に対応するので，水頭既定の節点（Γ_1，Λ_1 境界上の節点）が存在しないと不定になる．Γ_1 境界が存在しないとき，収束解に Λ_1 境界の存在が予想されるにもかかわらず反復計算中に Λ_1^{i-1} 境界が消滅すると，(24) 式と (30) 式は不定となり，上述のアルゴリズムでは解が得られなくなる．この対策を述べる．操作3の実行にあたり Γ_1，Λ_1^{i-1} の存在を確認する．存在しないならば，事前に指定した1個の節点，たとえば節点 k が Γ_1 上にあるものとして操作3を実行する．ただし，A_{km}^{i-1}，B_k^{i-1} も計算する．操作4の実行の後，h_k^{i} を次式より求める．

$$ h_k^{i} := (B_k^{i-1} - A_{km}^{i-1} h_m)/A_{kk}^{i-1} \tag{35} $$

(ここで，k についての総和は取らない，また，右辺分子第2項の m の総和において $m=k$ 項は累加しない.) 操作8に対しては節点 k が Γ_1 境界上にあるものとして通常の計算を行なう.

以上の対策を講じても，解が振動しながら収束する過程で比透水係数 K_e^r が $K_e^r=0$ となるとき，(24) 式と (30) 式が不定になることがある．$K_e^r=0$ の要素が連なって不透水層が生じ，流域が分離された形に (計算上) なってしまう．このとき分離された流域に Γ_1 または A_1 が存在しないと (24) 式と (30) 式は不定になる．この問題は，前もって，結果として予想される最少の K_e^r よりも小さい $K_{\min}^r$ (>0) を定め，操作2または操作8の b) で $K_e^r<K_{\min}^r$ ならば $K_e^r=K_{\min}^r$ として A_{mn}^{i-1}, B_n^{i-1} または ${}_mA_{nl}$, ${}_mB_n$ を求めて計算を続け，得られた収束解より全要素について $K_e^r>K_{\min}^r$ の成立を確認すれば回避できる.

操作7の修正に比べ，操作8の修正は非線型性のかなり強い連立方程式も確実に解けるが，1回の修正反復に対して連立1次方程式をその元数に等しい回数だけ解かなければならず，演算時間が非常に長くなる．演算時間短縮のために，操作6が単純な操作7の修正を i_s 回反復しても収束解が得られないときに初めて，操作8の修正を行なうようにしている.

操作7の修正をこのまま行なうと，非線形性が強い場合に，α が大きく ($\alpha>0.2$) さらに ${h_m}^0$ の誤差が大きいと解が振動または発散し，操作8の初期値の誤差が大きくなる．このため演算時間の長い操作8の反復回数が多くなってしまう．しかし，α が小さい ($\alpha<0.2$) と非線形性が弱い場合でも操作7による解の収束性が悪くなる．そこで，次の対策を講じた．すなわち，α を大きな値 ($\alpha>0.5$) にし，非線形性の大きな ($|dK^r/d\phi|$ の大きな) 範囲内に ϕ の値を適当な間隔で 5, 6 個取り，これを上昇順に並べ，i 番目の値を ϕ_i' とする．おのおのの節点に対し，操作7の結果，圧力水頭が ϕ_i' を1個以上飛び越えて変化するときは，ϕ' を最初に飛び越される ϕ_i', x_{m3} を節点 m の x_3 座標値として

$$h_m^i := x_{m3}+\phi' \tag{36}$$

と修正するわけである.

操作8が新しく提案された修正法である．理論は付録3を参照されたい．操作8 e) の (33) 式が付録3の (AIII.7) 式に対応する．演算時間短縮のため，操作8では上述の a)～f) の操作の他に次の操作を行った.「$\bar{\Omega}_j$ に含まれる要素の重心の飽和度 S_e をそれぞれ ${}_jh_l$ と h_l^{i-1} より求め比較する．もし，$\bar{\Omega}_j$ 内の全ての S_e がそれぞれ等しいならば，$m=j$ なる m に対して b), c), d) を省略し，e) の連立1次方程式を y_j を除外して解き，f) で，$m=j$ のとき

$$h_m^i := h_m^i \tag{37}$$

とする.」このような省略が可能なのは次の理由による．$\bar{\Omega}_j$ に含まれない要素の S_e は ${}_jh_l$ から求めても h_l^{i-1} から求めても等しくなるから，$\bar{\Omega}_j$ に含まれる全ての要素の S_e がそれぞれこの2つの求める方に対して等しくなるならば，流域の全要素の S_e も等しくなる．この

とき，要素の重心の比透水係数 K_e^r が S_e の1価関数であるから，全ての n, l に対して (30) 式と (24) 式で

$$ {}_jA_{nl} = A_{nl}^{i-1}, \quad {}_jB_n = B_n^{i-1} \tag{38} $$

となり，c) の ${}_j\tilde{h}_l$ と操作4の h_l^i が等しくなる．よって，操作8e) の連立1次方程式の係数行列の j 列は $C_{jj}(=-1)$ を除いて零となる．これはf) において，h_j^i を h_j^{i-1} の近傍で任意に修正したときに，次回の反復，操作4で得られる $m \neq j$ なる h_m^{i+1} の値が変化しないことを意味する．一般に，これは，$\bar{\Omega}_j$ 内の全要素が自由水面下にあるときに起きる．なぜならば，自由水面下にある節点は，自由水面付近を除いて $h_m^{i-1} - x_{m3} \gg 0$ となるから，$\bar{\Omega}_j$ 内の要素の和飽度は自由水面付近を除いて h_m^i を h_m^{i-1} の近傍で任意に修正しても，$S_e=1$ のままである．このとき，次回の操作4で (23) 式の係数行列の j 行と j 列の要素 A_{jm}^i と A_{mj}^i，さらに定数ベクトルの j 要素 B_j^i は h_m^i の修正に依存せず，(37) 式の修正は次回の反復操作4の解 h_m^{i+1} に影響しない．

この操作が行われると，操作8c) の連立1次方程式を解く回数が少なくなり，さらに，e) の連立1次方程式の元数が小さくなるため，計算機演算時間を短縮出来る，特に浸透流域の大半が飽和している場合に，短縮が著しい．

f) における β^{i-1} は

$$ \beta^{i-1} = \frac{\mathrm{H}_a}{y_{max}^{i-1}} \qquad (y_{max}^{i-1} > \mathrm{H}_a) \tag{40} $$

$$ \beta^{i-1} = 1 \qquad (\mathrm{H}_a > y_{max}^{i-1} > 0) \tag{41} $$

より求めた．ここで，H_a は適当な定数，y_{max}^{i-1} は

$$ y_{max}^{i-1} = |max\,(y_m)| $$

とする．また，$y_{max}=0$ のときは，(34) 式を

$$ h_m^i := h_m^i \tag{42} $$

とした．

操作9では2章の7), 8) の条件

$$ \text{境界 } \Lambda_1 \text{ 上で} \qquad n_i K_{ij}^s K_{ij}^r \frac{\partial h}{\partial x_j} \leqq n_3 \mathrm{R} \tag{43} $$

$$ \text{境界 } \Lambda_2 \text{ 上で} \qquad h \leqq x_3 \tag{44} $$

を判定し，成立しない境界の範囲は，それぞれ Λ_1 境界を Λ_2 境界に，Λ_2 境界を Λ_1 境界に変更している．

6. 数値計算例

図5に示す斜面の定常浸透を，境界ABを除き境界条件と物理定数を一定にし，ABの境界条件を自由排水（計算例1）または不透水層（計算例2）に変えた2例について解析した．

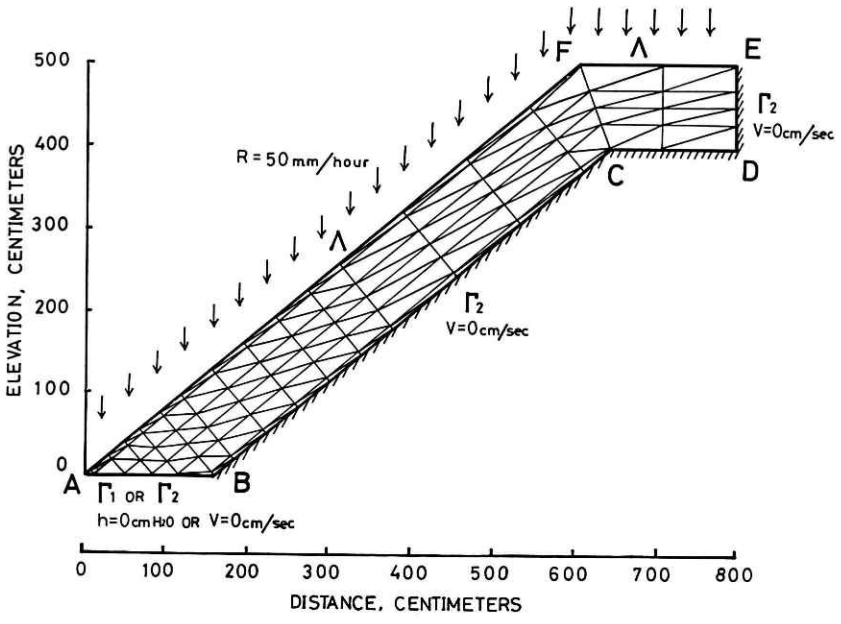


図 5　解析例の境界条件と領域の要素分割
Fig. 5　Cross Section of Analysis Region with Finite Element Network and Boundary Conditions

境界 AB は，計算例 1 では Γ_1 境界になり $h=0$ cm H_2O．計算例 2 では Γ_2 境界になり V＝0 cm/sec．計算例 1, 2 で不変な境界 BCDE は不透水層，すなわち，Γ_2 境界であり，V＝0 cm³/sec とする．境界 EFA は雨に打たれる面で降雨強度 50 mm/h，すなわち，Λ 境界であり，R＝50 mm/hour となる．物理定数は全浸透流域において，

飽和透水係数

$$K_{11}^S = K_{33}^S = 1.6\times10^{-2}\ \text{cm/sec} \qquad (45)$$

$$K_{13}^S = K_{31}^S = 0\ \text{cm/sec} \qquad (46)$$

比透水係数

$$K^r(S) = \left(\frac{S-0.1}{0.9}\right)^3 \qquad (47)$$

飽和度

$$S = 1 \qquad \psi \geqq 0 \qquad (48)$$

$$S = 0.3056 \arctan(0.2668\psi + 5.78) + 0.58 \qquad \psi < 0 \qquad (49)$$

とした．図 6 に比透水係数と飽和度，圧力水頭と飽和度との関係を図示した．

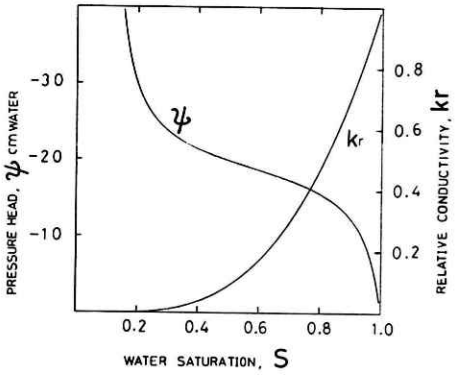


図 6　ψ と K^r の飽和度による変化
Fig. 6　Variation of ψ and K^r with Degree of Water Saturation

浸透流域の要素分割を図 5 に示す．全要素

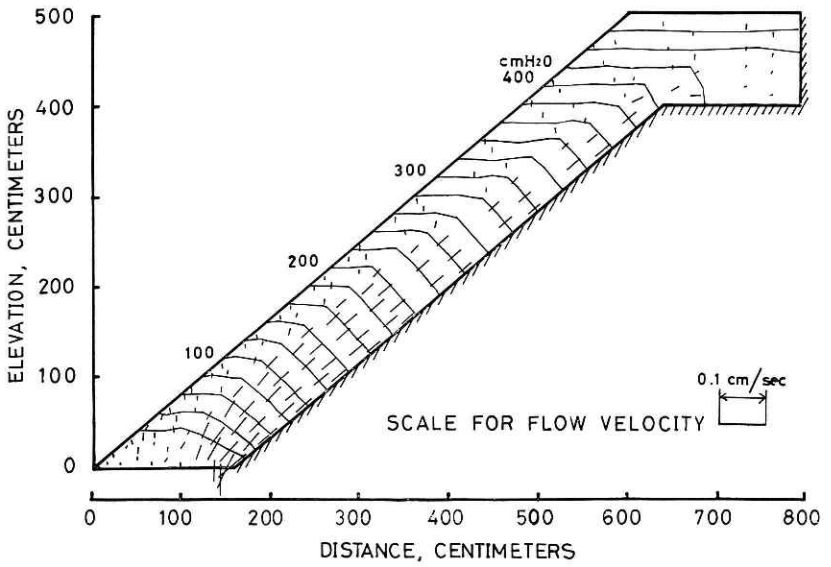


図 7　全水頭の分布と流速（矢印を省略）.〈計算例 1〉
Fig. 7　Contours of Total Water Head and Vector of Flow Velocity. (Arrow Heads are eliminated). 〈Analysis Example 1〉

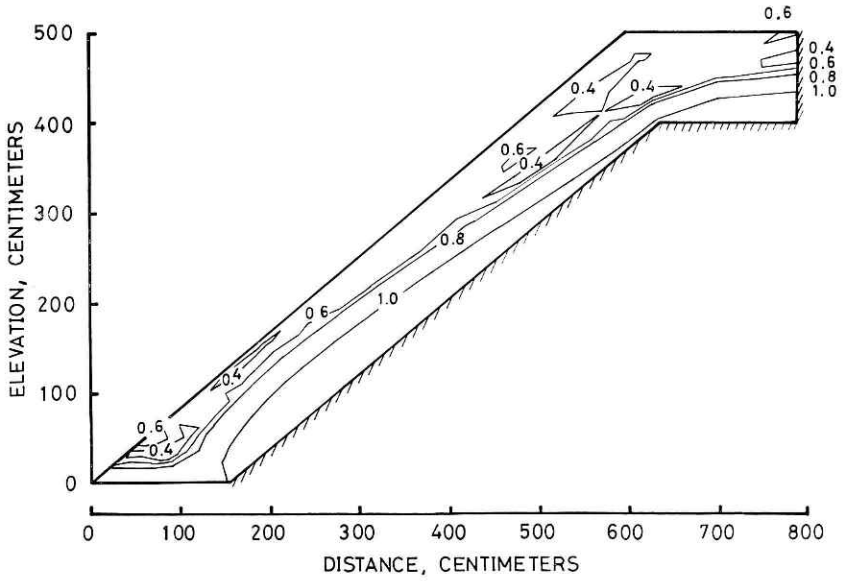


図 8　飽和度の分布.〈計算例 1〉
Fig. 8　Contours of Degree of Water Saturation. 〈Analysis Example 1〉

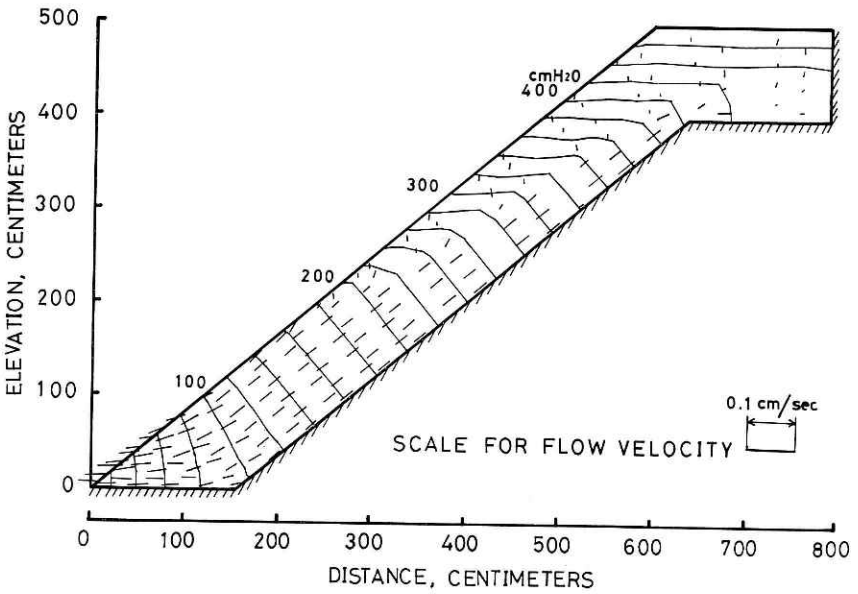


図 9　全水頭の分布と流速（矢印を省略）．〈計算例 2〉
Fig. 9　Contours of Total Water Head and Vector of Flow Velocity. (Arrow Heads are eliminated). 〈Analysis Example 2〉

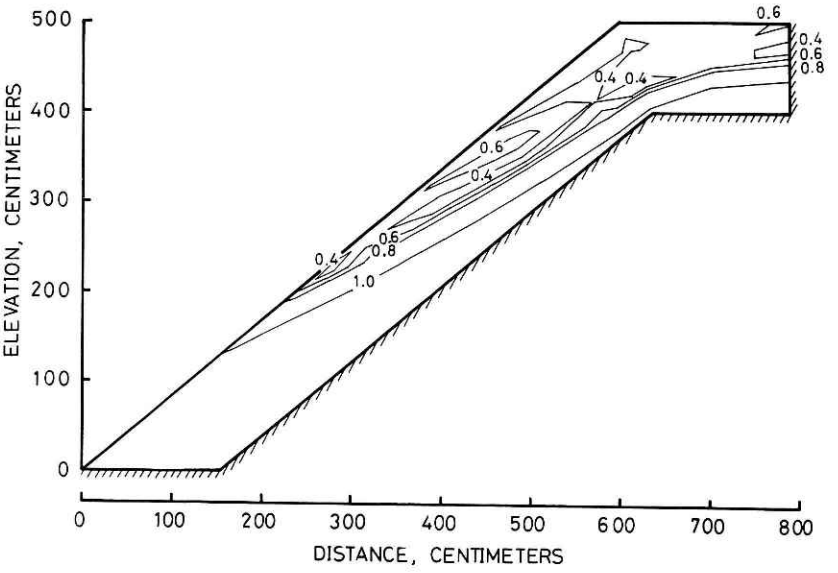


図 10　飽和度の分布．〈計算例 2〉
Fig. 10　Contours of Degree of Water Saturation. 〈Analysis Example 2〉

数は160個，全節点数は100個となる．5章のアルゴリズムに必要なパラメーターは

$$d = 0.5 \qquad H_a = 20\ \text{cm}\ H_2O$$
$$i_e = 150 \qquad i_s = 10$$
$$\alpha = 0.6 \qquad \varepsilon = 2\times10^{-4}$$
$$\phi_1' = -40\ \text{cm}\ H_2O \qquad \phi_2' = -30\ \text{cm}\ H_2O$$
$$\phi_3' = -20\ \text{cm}\ H_2O \qquad \phi_4' = -17\ \text{cm}\ H_2O$$
$$\phi_5' = -15\ \text{cm}\ H_2O$$

として計算した．ここで，人為的に決定する．これらのパラメーターと要素分割は物理的には解に影響を与えない．計算例1の解析結果を図7，図8に示し，計算例2は図9，図10に示す．図7と図9において，流域中の線分は流速のベクトルをあらわすが，矢印を省略した．

計算例1と2はともに，湧出点付近を除き，飽和度0.8以上の領域では地下水が斜面に平行に流れ，飽和度0.8未満の領域では40度の急勾配斜面にもかかわらず鉛直方向に土中水が流れる．自由水面（図8，図10で$S=1.0$の等飽和度線）の形態が計算例1，2で異なる．解析的考察（Kono, 1974）によると，湧出点において自由水面と境界のなす角度は，流域外から見て境界がオーバーハングしている場合は，90度，他の場合は0度となる．故に，計算例1は境界ABと自由水面が垂直に交わり，計算例2は湧出点で境界AFと自由水面の傾斜が等しくならねばならない．しかし，計算例では有限要素法の離散化誤作と要素分割の適否により，湧出点の境界と自由水面のなす角度が理論からずれている．

図6より，$S=0.6$付近でϕが変化するとK^rが大きく変化し，非線形性が強いことがわかる．不飽和浸透を考慮した有限要素法によるロックフィルダムや河川堤防の解析例の多くは降雨浸透を考えず，図1のΓ_1境界のような水位を有する水源からの浸透を対象にしている．この場合，不飽和域を通過する浸透流量の全体の浸透量に対する割合が少なく，たとえ，不飽和域で非線形性が強くても，非線形性の流れ全体に及ぼす影響はさほど大きくない．しかし，水位をもつ貯水池や河川が存在せず，降雨のみを水源とする本報告の計算例は，斜面土中を流れる浸透流の大半が非線形性の強い不飽和域を通過しており，不飽和浸透の流れ全体への影響が大きくなる．このため，計算例は，前述のロックフィルダムや堤体の解析例に比べはるかに不安定になっている．にもかかわらず，5章のアルゴリズムを用いることにより，解が安定して得られた．

7. 結　　語

降雨による土中水と地下水の定常浸透流を不飽和浸透を考慮して境界値問題に定式化した．この境界値問題はラプラス型の非線形偏微分方程式になるが，雨水の浸透する境界と土中水・地下水の湧出する境界で第1種の境界条件（水頭が既定）か，第2種の境界条件（浸

透水量が既定）かが事前に定まらない場合があり，解析解を得るのが困難になる．このため，ガレルキン有限要素法を用いて境界値問題を非線形連立方程式に離散化し，これを線形計算を繰返す反復法で解いた．ここで提案された反復法は，不飽和浸透域で非線形性のかなり強い場合や，やや不安定な境界条件をもつ場合でも安定して収束解が得られた．これは，非線形性が強くかなり不安定な他の問題への有限要素法の応用を示唆している．

参考文献

1) 赤坂　隆（1967）：数値計算，応用数学講座第7巻，コロナ社，1967，221 pp.
2) 藤野　勉（1972）：熱伝導と熱応力，コンピュータによる構造工学講座 II-4-B，培風館，95 pp.
3) 駒田・金沢（1975）：フィルダムの貯水池水位急降下時の非定常浸透流解析，および安定解析，土木学会論文報告集第**240**号.
4) Kono, I. (1974): Finite Element Analysis of Interface Problem in Groundwater Flow, *PROC. OF JSCE*, No. **228**, AUG. 1974, 109-116.
5) Neuman (1971): Analysis of Nonsteady Flow with a Free Surface Using the Finite Element Method, *Water Resources Research*, Vo. **7**, No. 3, June 1971, 611-623.
6) 山田・小田（1975）：有限要素法による非ダルシン浸透流の一解法，土木学会論文報告集第**234**号. 111 pp.

（1977年7月21日　原稿受理）

付録 1　記　　号

本文に用いられた記号を以下に示す．

A_{nm}　境界値問題を離散化して得られる非線形連立方程式の係数行列．

A_{mn}^{i-1}　第 $i-1$ 次反復解より求めた連立1次方程式の係数行列．

${}_mA_{nl}$　${}_m\boldsymbol{h}$ より得た連立1次方程式の係数行列．

B_n　境界値問題を離散化して得られる非線形連立方程式の定数ベクトル．

B_n^{i-1}　第 $i-1$ 次反復解より求めた連立1次方程式の定数ベクトル．

${}_mB_n$　${}_m\boldsymbol{h}$ より得た連立1次方程式の定数ベクトル．

b_{ne}　φ_{ne} の定数係数（付録2参照）．

C_{lm}　$i-1$ 次反復解と収束解との誤差の近似値を与える連立1次方程式の係数行列．

c_{ne}　φ_{ne} の定数係数（付録2参照）．

D_l　$i-1$ 次反復解と収束解との誤差の近似値を与える連立1次方程式の定数ベクトル．

d　h^{i-1} より ${}_m\boldsymbol{h}$ を作る任意定数．

H　既知水頭，既知全水頭．

h　水頭，全水頭．

H_α　β^i を求めるための任意定数．

h_k'　既知水頭の節点 k における水頭．

h_n　節点 n の水頭．

h_n^i　節点 n の水頭の i 次反復解．

${}_m\boldsymbol{h}$　h_n^{i-1} と d より作られるベクトル．

${}_mh_n$　${}_m\boldsymbol{h}$ の第 n 要素，${}_mh_n=h_n^{i-1}+\delta_{mn}\cdot d\cdot\mathrm{sign}\,(h_n^i-h_n^{i-1})$．

${}_m\tilde{h}_e$　連立1次方程式，${}_mA_{ne}\,{}_m\tilde{h}_e={}_mB_n$ の未知数．

i　非線形連立方程式の反復解法の反復回数．

i_e　非線形連立方程式の反復解法の許容反復回数．

i_s　非線形連立方程式の反復解法の単純な修正に対する許容反復回数．

K_{ij}　透水係数．

K_{ij}^S　飽和透水係数．

K^r　比透水係数．

K_e^r　要素 e の重心における比透水係数．

n_i　境界の外向き単位法線ベクトル．

$Q_n^{\Gamma_2}$　非線形方程式の定数項 B_n を構成する数．Γ_2 境界より派生する．

$Q_n^{\Lambda_2}$　非線形方程式の定数項 B_n を構成する数．Λ_2 境界より派生する．

q_i　ダルシー流速の x_i 座標方向の成分.

R　雨量強度.

S　飽和度.

S_e　要素 e の重心の飽和度.

sign　$\mathrm{sign}\,(Z)=Z/|Z|\quad(Z\neq 0)$

$=0\quad(Z=0)$

V　Γ_2 境界より浸透流域に単位時間・単位面積に流入する水量.

x_i　i 方向デカルト座標.

x_3　鉛直方向デカルト座標.

y_m　h_m^{i-1} と収束解 h_n との誤差の近似値.

y_{max}^{i-1}　y_m の絶対値の最大値.

α　反復解法の修正係数（5章操作7参照）.

β^{i-1}　反復解法の修正係数（5章操作8f）参照）.

Γ　境界条件が既定される境界.

Γ_1　水頭 h_n の値が既知 $(h_n=\mathrm{H})$ の境界.

Γ_2　単位時間・単位面積の流入水量が既知な境界.

Γ_{e2}　要素 e の Γ_2 境界となる辺.

Δ　要素 e の面積.

δ_{mn}　クロネッカーデルタ　$\delta_{mn}=1\quad(m=n)$

$=0\quad(m\neq n)$

ε　非線形連立方程式反復解法の許容誤差.

Λ　境界条件が既定されない境界.

Λ_1　結果として水頭が既定された Λ 境界.

Λ_2　結果として浸透水量が既定された Λ 境界.

Λ_1^i　i 次反復解より得られた Λ_1 境界の範囲.

Λ_2^i　i 次反復解より得られた Λ_2 境界の範囲.

φ_n　h を線形結合，$h=h_n\varphi_n$ で近似するガレルキン法の基底関数.

φ_{ne}　要素 e より派生して φ_n を構成する関数.

ψ　圧力水頭.

ψ_i'　反復法による解の振動・発散を防ぐパラメーター $(\psi_i'<0)$. 上昇順に，$i=1$, $i=2, \cdots$, とする.

Ω　解析領域，解析流域.

Ω_e　要素 e の占める領域.

$\bar{\Omega}_n$　節点 n を頂点に持つ要素の占める領域.

付録 2　φ_{ne} の関数型

図 AⅡ.1 に示すように，要素 e の占める領域を Ω_e，要素 e の 3 節点を l, m, n とし，3 節点の座標をそれぞれ (x_{l1}, x_{l3}), (x_{m1}, x_{m3}), (x_{n1}, x_{n3}) とする．φ_{ne} は Ω_e の外で 0，Ω_e の中で x_1, x_3 の 1 次関数とする．

$$\varphi_{ne}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\Delta}(a_{ne}+b_{ne}x_1+c_{ne}x_3)$$
$$(x_1, x_3) \in \Omega_e \quad (\text{A}\mathrm{II}.1)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_{l1} & x_{l3} \\ 1 & x_{m1} & x_{m3} \\ 1 & x_{n1} & x_{n3} \end{vmatrix} \quad (\text{A}\mathrm{II}.2)$$

$$\varphi_{ne}(x_1, x_3) = 0 \quad (x_1, x_3) \notin \Omega_e \quad (\text{A}\mathrm{II}.3)$$

とする．ここで，Δ は要素 e の面積になる．φ_n の値が節点 n で 1，辺 lm で 0 になるから

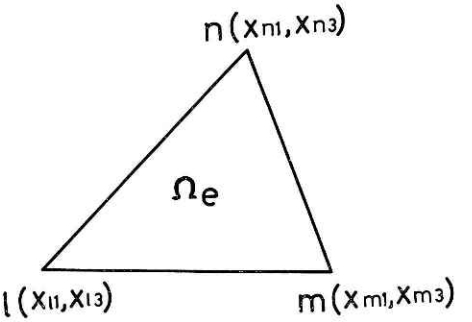


図 AⅡ.1

$$\begin{aligned} a_{ne}+b_{ne}x_{l1}+c_{ne}x_{l3} &= 0 \\ a_{ne}+b_{ne}x_{m1}+c_{ne}x_{m3} &= 0 \\ a_{ne}+b_{ne}x_{n1}+c_{ne}x_{n3} &= 2\Delta \end{aligned} \quad (\text{A}\mathrm{II}.4)$$

a_{ne}, b_{ne}, c_{ne} について解くと

$$a_{ne} = x_{l1}x_{m3}-x_{m1}x_{l3} \quad (\text{A}\mathrm{II}.5)$$
$$b_{ne} = x_{l3}-x_{m3} \quad (\text{A}\mathrm{II}.6)$$
$$c_{ne} = x_{m1}-x_{l1} \quad (\text{A}\mathrm{II}.7)$$

$\varphi_{le}, \varphi_{me}$ も同様に求めると，従属関係

$$\varphi_{le}+\varphi_{me}+\varphi_{ne} = 1 \qquad (x_1, x_3) \in \Omega_e \quad (\text{A}\mathrm{II}.8)$$

が成立する．

付録 3　第 i 次反復解と真の解との誤差を求める修正法

係数 A_{nm} が未知数 h_j $(j=1, 2, \cdots, m, \cdots, n, \cdots)$ の単調連続関数となる準線形連立 1 次方程式

$$A_{nm}(h_j)\, h_m = B_n(h_j) \quad (\text{A}\mathrm{III}.1)$$

を考える．近似解を y_j とし，y_j と真の解 h_j との誤差を ε_j とする．

$$h_j = y_j+\varepsilon_j \quad (\text{A}\mathrm{III}.2)$$

(AⅢ.1) 式の h_j に y_j を代入し，z_m を未知数とする連立 1 次方程式

$$A_{nm}(y_j)\, z_m = B_n(y_j) \quad (\text{A}\mathrm{III}.3)$$

を解くと，z_m は y_j の関数となる．

$$z_m = z_m(y_j) \tag{AⅢ.4}$$

上式の y_j に h_j を代入すると z_m の定義より

$$h_m = y_m + \varepsilon_m = z_m(y_j + \varepsilon_j) \tag{AⅢ.5}$$

Taylar 展開して，ε_i の二次以上の項を無視すると

$$y_m + \varepsilon_m = z_m(y_j) + \sum_i \frac{\partial z_m}{\partial y_i}\varepsilon_i \tag{AⅢ.6}$$

となる．故に ε_j は

$$a_{mj}\varepsilon_j = b_m \tag{AⅢ.7}$$

$$a_{mj} = \frac{\partial z_m}{\partial y_j} - \delta_{mj} \tag{AⅢ.8}$$

$$b_m = y_l - z_l(y_j) \tag{AⅢ.9}$$

を解いて近似的に求められる．ここで，δ_{mj} はクロネッカーのデルタをあらわす．β を適当な定数として，$y_j + \beta\varepsilon_j$ を新たに y_j として反復を繰返すと，y_j の h_j への収束が予想される．