

海水混合に果たす潮汐の役割 - 緩やかに水深が変化する海域を伝わる内部波にKdV方程式について -

著者	都司 嘉宣
雑誌名	国立防災科学技術センター 研究報告
巻	17
ページ	167-188
発行年	1977-03
URL	http://doi.org/10.24732/nied.00000748

海水混合に果たす潮汐の役割り

——緩やかに水深が変化する海域を伝わる内部波に対する KdV 方程式について——

都 司 嘉 宣*

国立防災科学技術センター平塚支所

KdV Equation for the Internal Waves Propagating in the Two-Layered Sea on an Uneven Bottom

By

Yoshinobu Tsuji

*Hiratsuka Branch, National Research Center for Disaster Prevention
No. 9-2, Nijigahama, Hiratsuka, Kanagawa-ken 254*

Abstract

Recently, Apel *et al.* (1975) observed the striped features of packet of slicks on the ocean surface of continental shelf from the Earth Resources Technology Satellite and pointed out that these slicks are accompanied with the internal waves propagating on the seasonal thermocline, and that the packet of short length internal waves has the same period as semidiurnal tide.

In this paper, KdV equation for internal waves propagating in the two-layered sea with slowly varying of depth is deduced. It is shown that the semidiurnal internal waves induced by tide at the continental slope undergo 'solitary wave fission' on the shelf and turn into packets of internal waves of short length.

1. はじめに

最近、ニューヨーク沖やケープタウン近海の大陸棚海域の衛星写真上に、等深線にほぼ平行な、特徴あるうろこ状の模様が現われているという報告が、Apel ら (1975) によってなされた。そのうろこ状模様は、ニューヨーク沖のものでは、水深 100 m 前後の海域で発生し、陸に向かって進んでおり、水深 50 m 前後の、シーズナル・サモクライン (季節水温躍層、以下躍層と呼ぶ) が海底とぶつかる海域で消滅している (図 1)。

Apel らは、このうろこ状模様を形成する 1 本 1 本のしま模様は、躍層を伝わる内部波の 1 波 1 波に対応していること、さらにうろこ 1 枚分を形成するこれらのしま模様の群れ、つまり内部波の波群 (Apel らに従ってウェーブ・パケットと呼ぶ) の発生の周期は、半日周期

* 沿岸防災第 1 研究室

の周期に等しいことを示し、このうろこ状模様の生成原因が、潮汐であることを指摘している。

月や太陽による起潮力が、直接内部波を起こすことはできないということは、Defant (1961) によって示されている。Cox ら (1962) は、表面重力波 (バロトロピックモード) としての、普通の潮汐のエネルギーの一部が、海堆や陸棚斜面の海域で、内部波となることを理論的に導いている。また湾や湖などで、潮汐に近い周期を持つ内部波が、実測された例も数多くある。そして理論的な研究にしろ、観測事実にしる、潮汐が直接、間接の原因となって生ずる内部波は、それによる躍層の鉛直運動、あるいは流速の時間変化は、ともに潮汐の主要成分である半日周の M_2 潮と同じ周期の、正弦曲線的な形を取ることが示されている。

ところが Apel らが衛星写真上に見出したものは、周期・波長の短い数多くの内部波のパケットが、全体としてこの半日周潮の周期で現われているという点で、上述の多くの内部潮汐の実測例とは異なっており、Cox らの理論だけでは説明できないものである。

潮汐によって、どうしてこのように周期の短い内部波のウェーブ・パケットが形成されるのかということについては、Apel らは不明であるとしている。

潮汐のように、周期・波長の非常に長い波によって、陸棚斜面の影響で誘起されて生じた内部波は、大陸棚上を陸に向かって進み始める。誘起された当初、内部波はもとの潮汐と同じ半日



図 1 ニューヨーク沖海域にみられる、内部波のウェーブ・パケットによるうろこ状模様(右下方)、上方はロングアイランド島。衛星写真をコンピュータによる濃淡鮮明化の処理をしたもの。Apel ら (1975) による 1973 年 7 月 24 日のデータ。

Fig. 1 The feature of packets of slicks accompanied with internal waves (lower right hand corner), from Earth Resources Technology Satellite, off New York, July 24, 1973. The picture is enhanced for stretching the contrast with computer processing. (after Apel *et al.* (1975))

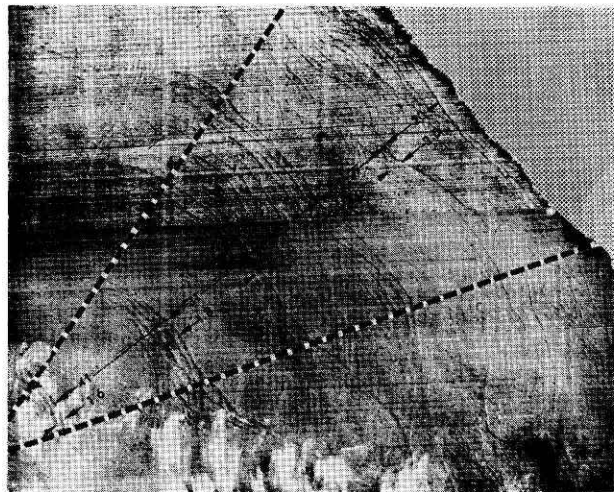


図 2 ケープタウン北方海域にみられるウェーブ・パケット。Apel らによる、1972 年 8 月 16 のデータ。

Fig. 2 The features of internal wave packets, off eastern coast of South Africa, just north of Cape Town, Aug. 16, 1972. (after Apel *et al.*)

の周期を持っているはずである。ここで観測されたウェーブ・パケットは、こうしてできた長い周期と、長い波長を持つものとの内部波が、何らかのメカニズムで、波長の短い多くの内部波に分裂したものと考えられる。

本稿では、第2節で内部波の存在がどうして上空から観測されるのかというその理由を述べ、第3節でウェーブ・パケットの実態をいまい少し詳しく観察し、第4節以下でその生成のメカニズムについて考察してみることにする。

2. 内部波が上空から観測できる理由

内部波とは躍層などの密度境界面を伝わる波である。その躍層は、普通水深数 10 m またはそれ以深にあるから、そこを伝わる内部波を上空から直接観察することは、たいていの場合不可能である。ところが、航空写真や、衛星写真に、内部波の存在を示すしま模様が見られることがある(図3)。このように内部波が上空から「見る」ことができる理由として、次に挙げるような2つのメカニズムを考えることができる。

(1) 内部波によって誘起される表面物質の離合

躍層に振幅の大きな内部波があると、海表面に縮まった部分と、伸びた部分ができる。その様子を模式的に図4に示す。いま内部波によって躍層が太い実線で示す形をなして、右方へ速度 c で伝わっているとする。細い実線で示された円や短い線分は、各水深での水粒子の軌道を表わす。黒丸は、内部波が図に示されたような状態に占める位置を表わす。表面付近にある A, B, C の三つの位置にある水粒子に着目すると、それらの軌道の中心はおおの半波長ずつ隔たっているから、各平均位置は等間隔である。ところがこの図の時点では、AB 粒子間の距離はこの平均(=半波長)より縮められ、BC 粒子間は逆に引き伸ばされている。つまり、内部波の山の真上では海の表面が収縮し、谷の真上では拡大して

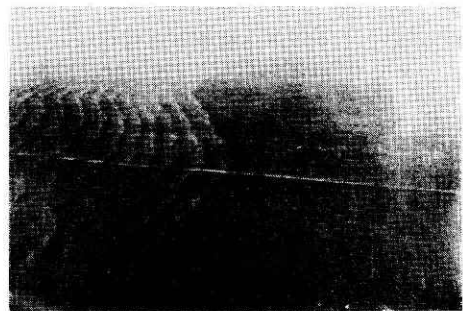


図3 航空写真から観測される内部波。白線は船の航跡である。Apel らによる。

Fig. 3 An example of slicks accompanied with internal wave observed on aircraft. (after Apel et al.)

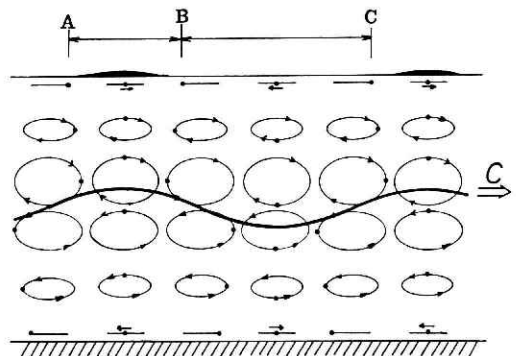


図4 内部波によって誘起される表面物質の離合。
Fig. 4 Convergence and divergence of the sea surface films induced by internal wave.

い、同様にCD間に発生したさざ波はE点より右に進むことができない。またBC間で発生したさざ波はすべて左方に流されるが、やはり同じ理由でA点より左方へは進めない。結局内部波が存在するために、このような海面の水平流速の分布ができた海では、風が何かの原因によって発生したすべてのさざ波は、AB間、DE間のような収束領域に引き込まれ、そこに捕えられて、脱出できなくなってしまう。実際には、このような流れの場自体が、内部波の伝播速度 c で、内部波に伴って右方に移動しているのであるから、内部波による最大表面水平流速を $U_{\max}$ として、

$$c - U_{\max} \leq c_g \leq c + U_{\max}$$

なる群速度 c_g を持つさざ波に対して、このような捕獲領域が生じ、さざ波がそこに集中するという現象が起こる。

図6、図7は、内部波によって捕えられたさざ波の実験写真である。上層は比重0.78の灯油、下層は比重1.0の着色水で、内部波は両図とも右方に進んでいる。いずれも内部波の山の前方の灯油の上層の表面に、小さなさざ波が二、三波捕えられているのがわかる。

この様な状態を上方から見ると、内部波それ自身は直接見ることはできなくても、さざ波がせまい帯状に何本か存在している様子から、内部波の存在が間接的に観測されるであろう。

以上に述べた(1)、(2)いずれのメカニズムが、より普遍的であるかは不明であるが、躍層を伝わる内部波の存在が上空から間接的に観測されるということは、十分ありうることでありと了解されるであろう。

3. うろこ状模様の特徴

図1、図2に見られるうろこ状模様の特徴をいまいち細かく見てみると、Apelらも指摘しているように、次のような特徴があることがわかる。すなわち図8に模式的に示されるように、

(a) 各ウェーブ・パケットの先頭のすじが最も鮮明であって、後方のすじほど順次薄くなってゆく。

(b) 1パケットを形成する、各すじの間隔は、パケットの前の方ほど大きい。すな

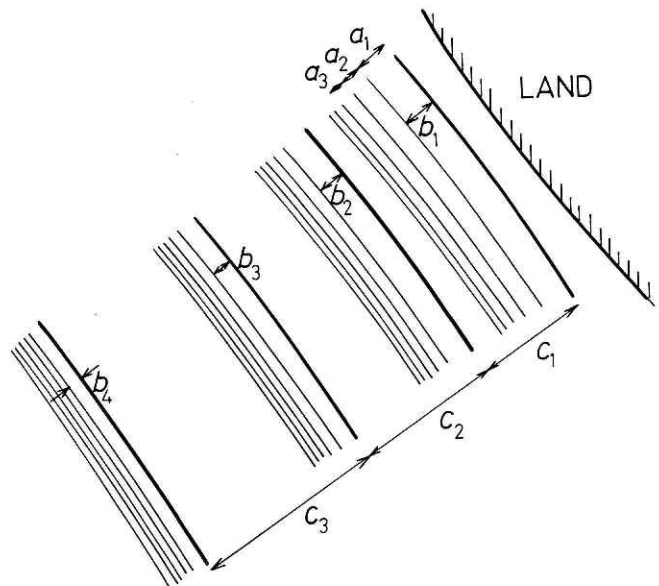


図8 うろこ状模様の特徴を模式的にかいた図
Fig 8. Schematic drawing of the internal wave packets.

わち図8において $a_1 > a_2 > a_3 \cdots$ である.

(c) あるパケット先頭のすじと, 次のパケットのそれとの間隔は, 陸に近いほど小さい. すなわち図8において $b_1 < b_2 < b_3 \cdots$ である.

(d) パケットの一番先頭のすじと, 次のすじの間隔は, 陸により近い位置にあるパケットのものほど大きい. すなわち図8において $c_1 < c_2 < c_3 \cdots$ である.

ウェーブ・パケットの形成の原因を究明する際には, この四つの特徴をすべて合理的に説明できるようなメカニズムを想定することが必要となる.

これらのうち (d) の特徴は, 線型近似の範囲内での内部波の波速に関する知識だけで説明することができる. すなわち2層構造の海を伝わる内部波の波速は, 波長が水深に比べて十分長いとき, 上下層の厚さをそれぞれ h, h' とし, 密度を ρ, ρ' とすると,

$$c_0 = \sqrt{g(\rho - \rho')(\rho/h + \rho'/h')^{-1}} \quad (2)$$

で与えられる. 上層とは, 海面から躍層までの層, つまり表面混合層である. これは通常広い範囲にわたって厚さ一定であることが多い. 図1のニューヨーク沖の場合その厚さ h' は約 50m である. h' を一定とすると, (2) 式より, 波速 c_0 は, 下層の厚さ h が小さいほど, つまり浅い海ほど小さくなる. ウェーブ・パケットの発生原因が潮汐であるのなら, あるウェーブ・パケットの先頭のすじが形成されてから次のウェーブ・パケットのそれが形成されるまでの時間は半日周潮周期, すなわち 12.4 時間たっているはずである. この時間に (2) 式で計算した波速 c_0 を乗ずると, 一つのウェーブ・パケットの先頭のすじから次のウェー

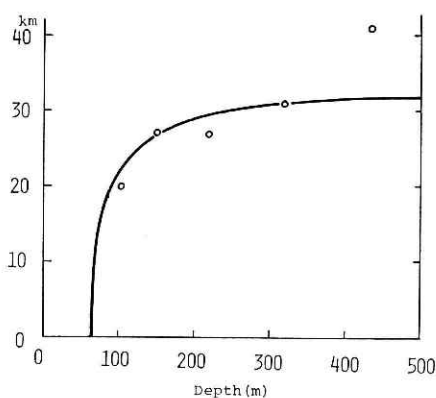


図9 ウェーブパケットの先頭のすじの間隔と深度の関係. 実線は (各深度での内部波波速) $\times$ (半日周潮周期).

Fig. 9 Relationship between the distance of successive front of the internal wave packets and depth for the data of the Fig. 2 (small circle). Full line shows the product of period of semidiurnal tide and internal wave velocity c_0 calculated by the equation (2).

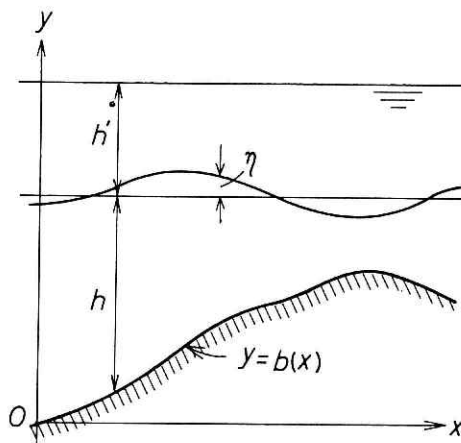


図10 座標系と変数の定義.

Fig. 10 Coordinate system and notations.

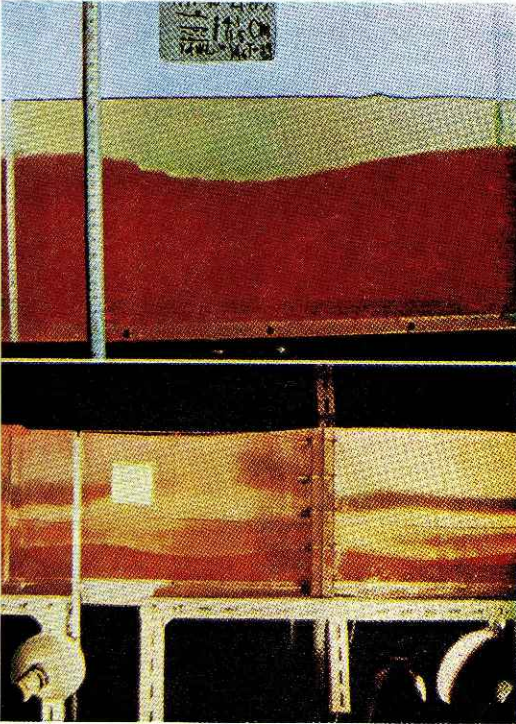


図 6 内部波に捕えられたさざ波. 内部波は右に進んでいるが, その谷の前面にさざ波が捕えられている.

Fig. 6 Experiment for exemplifying of packet of ripples entrapped by internal wave propagates left to right, and a packet of ripples is entrapped on the down slope of it.

図 7 内部波に捕えられたさざ波. 内部波は右に進んでいる. その谷のおのの前面に, それぞれさざ波が捕えられている.

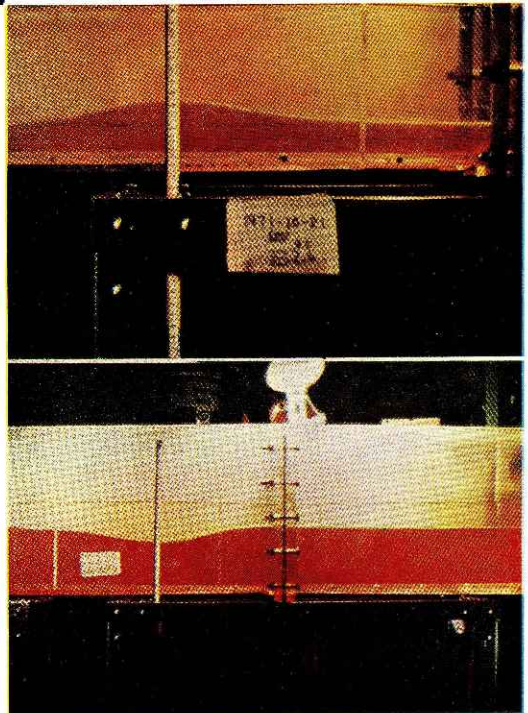
Fig. 7 Three packets of ripples are entrapped by internal wave which propagates left to right.

図 13 正立した内部孤立波の実験写真. 下層より上層の方が層が厚い場合生ずる. 上層は灯油 ($\rho=0.78$), 下層は着色水 ($\rho=1.0$).

Fig. 13 Internal solitary wave of normal type, which appears in the case that the lower layer is thicker than the upper layer.

図 14 倒立した内部孤立波の実験写真. 上層より下層の方が厚い場合生ずる. 用いた液体は図 13 と同じ.

Fig. 14 Internal solitary wave of upside down type, which appears in the case that the upper layer is thicker than the lower layer.



ブ・パケットのそれまでの間隔, すなわち図 8 の $c_1, c_2, c_3, \dots$ に近い値が得られるはずである. このことを図 2 のケープタウン近海の衛星写真にみられる 6 重のウェーブ・パケットについて検証すると, 図 9 が得られる. 横軸は水深で, 太実線は $c_0 \times 12.4$ 時間の値を表わしている. $h' = 60 \text{ m}$, $(\rho - \rho')/\rho = 2.0 \times 10^{-8}$ と推定して計算してある. 小円は図 2 から得られた c_i ($i=1, 2, \dots, 5$) である. 小円の分布は実線にかなりよく一致している.

(a), (b), (c) の特徴は, 線型理論の範囲の議論だけでは説明できない.

4. 計算の方針と基本方程式

本節以下では, 水深が緩やかに変化する, 2 層構造の海を伝わる, 長波性の内部波の非線型第 1 近似までの議論を展開する. 内部波の波高の, 層厚に対する比を 1 次微小量 ε と考える. 流体力学の基本方程式を線型化して第 0 近似としての線型解を求め, その結果を基礎に, 摂動法により非線型第 1 近似解を求める.

内部波は等深線に垂直な方向に進行すると仮定し, 等深線に平行な方向には運動の変化がないとすると, 2 次元の問題として取り扱うことができる. 海底のある 1 点に原点を取り, 海の進行方向に x 軸, 鉛直上方に y 軸を取る. 海底地形は $y=b(x)$ で表わされるとする. 静止の位置からの躍層の鉛直変位を $\eta(x, t)$ とする. 海底および躍層面での摩擦, 粘性, 地球回転の影響などは無視する. 上下各層の海水の運動はともにうずなし運動であると仮定すると, 各層に速度ポテンシャル関数 ϕ, ϕ' がそれぞれ存在する. (以下 ' をつけたものはすべて上層に関する量とし, つけてないものは下層に関する量とする.) このとき連続の方程式は,

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{および} \quad \nabla^2 \phi' = 0 \quad (3-a, b)$$

となる. 内部波の直接の影響による海面の昇降は, 大変小さく, 海の表面は静止した水平面を保ち続けると考えてよい. こう考えて取り扱ってもよいという理由の正確な論証については Tsuji and Nagata (1974) にゆずることにする. とにかく, 今の問題に対しては, 流速の y 方向成分を v としたとき,

$$v = 0 \quad \text{at} \quad y = b + h + h' \quad (4)$$

という海表面での境界条件が成り立つ.

躍層の厚さは無視する. すなわち上下両層は躍層の所で直接接していると考え. そのでの運動学的連続条件から,

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{on} \quad y = h + b + \eta \quad (5-a)$$

$$v' = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{on} \quad y = h + b + \eta \quad (5-b)$$

が得られる. また圧力の連続条件から,

$$\rho \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right\} = \rho' \left\{ -\frac{\partial \phi'}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) \right\} \quad \text{on} \quad y = h + b + \eta \quad (6)$$

が得られる。海底における境界条件は、

$$\frac{v}{u} = \frac{db}{dx} \quad \text{on } y=b \quad (7)$$

となる。

5. 微小量と各物理量の大きさの程度（オーダー）の見積り

躍層を伝わる内部波に対して、基本的な長さ、および時間のスケールとして、水深 $H (=h+h')$ と、周期 T を考える。周期といっても解が必ずしも明白な周期性を持つとは限らないから、およそ内部波1波が通過する程度の時間とする。

内部波の波高の、水深に対する比を微小量の単位と考え、 ε で表わす。すると前節で定義した躍層の鉛直変位量 $\eta(x)$ は、 εH の程度（オーダー）の量であるということができる。このことを

$$\eta = O(\varepsilon H) \quad (8)$$

と表わすことにする。

大陸棚の水深は、一般に 200 m より浅いのが普通である。これに対し図 1, 図 2 に見られるような内部波の波長（より正確には水平スケール）は、小さく見積っても 2~3 km 程度である。すなわち波長は水深に比べて「かなり大きなオーダーの量」である。

いま内部波の水平スケール L は、前に定義した ε を使って、

$$L = O(\varepsilon^{-1/2} H) \quad (9)$$

であると仮定する。

(8), (9) 式より

$$\eta L^2 / H^3 = O(1) \quad (10)$$

が得られる。ここに現われた $\eta L^2 / H^3$ は、孤立波、クノイド波のような有限振幅の表面浅海波の理論での Ursell のパラメータと呼ばれる量である。すなわち、(9) 式はこの内部波の問題に対して、有限振幅の浅海波の理論と同様に、Ursell の条件が満たされているという条件を式で表わしたものである。

これらの基本の量のオーダーが定まると、内部波に関する諸量のオーダーが以下のように定まる。まず水平流速 u のオーダーは、連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

において、

$$v = O(\eta/T) = O(\varepsilon^1 H^1 T^{-1})$$

$$\partial x = O(L) = O(\varepsilon^{1/2} H^{-1})$$

$$\partial y = O(H^{-1})$$

であるから

$$u=O(vL/H)=O(\varepsilon^{1/2}H^1T^{-1})$$

と定まる. 重力加速度 g のオーダーは (2) 式において c_0 のオーダーが

$$c_0=O(L/T)=O(\varepsilon^{-1/2}H^1T^{-1})$$

であることに注意すれば

$$g=O(\varepsilon^{-1}H^1T^{-2})\times\rho/(\rho-\rho')$$

と定まる. 密度 ρ, ρ' に関する部分は, オーダーの見積りのさいには問題としないことにする.

さらに, 水深の変化が「緩やか」であるという条件を付け加え, その「緩やかさ」のオーダーは, たかだか

$$O\left(\frac{db}{dx}\right)=\varepsilon^{3/2}$$

であると仮定する. すなわち海底の勾配の大きさは, たかだか内部波の波形勾配のオーダーの量であると仮定する.

以下の議論に出てくる数式の中の, どの項を残してどの項を無視するかは, 上に示した諸量のオーダーを見積ることにより, 判定することができる.

6. 微小量 ε による基本式の展開

上層での速度ポテンシャル ϕ' を, 海面の位置 $y=H_0$ のまわりで Taylor 展開して,

$$\phi'=\sum_{n=0}^{\infty}\phi'_n(x)(y-H_0)^n \quad (11)$$

と置く. ここで H_0 は $x=0$ における水深である. (3-b) に代入すると,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\phi'_{n-2}+n(n+1)\frac{d^2}{dx^2}\phi'_n\right\}(y-H_0)^n=0$$

となる. 各項の係数を 0 とおくと, 次の関係が得られる.

$$\phi'_{2k+1}=-\frac{1}{(2k+1)\cdot 2k}\frac{d^2}{dx^2}\phi'_{2k-1}=\cdots=(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}\phi'_1,$$

$$\phi'_{2k}=-\frac{1}{2k\cdot(2k-1)}\frac{d^2}{dx^2}\phi'_{2k-2}=\cdots=(-1)^k\frac{1}{2k!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\phi'_0.$$

ところで (4) の条件を ϕ' で表わし, (11) を代入すると,

$$\phi'_1=0$$

が得られ, 結局上層での速度ポテンシャルは,

$$\phi'=\phi'_0-\frac{1}{2!}(y-H_0)^2\frac{d^2}{dx^2}\phi'_0+\frac{1}{4!}(y-H_0)^4\frac{d^4}{dx^4}\phi'_0+O(\varepsilon^3\phi'_0) \quad (12)$$

となる.

下層の速度ポテンシャルについては, 海底 $y=b(x)$ からの Taylor 展開した形で表わして,

$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)(y-b)^n \quad (13)$$

と置く。これを (3-a) に代入し、各項の係数を 0 と置いて海底条件 (7) を使えば、前と同様に、

$$\phi = \phi_0 - \frac{1}{2!} (y-b)^2 \frac{d^2}{dx^2} \phi_0 + \frac{1}{4!} (y-b)^4 \frac{d^4}{dx^4} \phi_0 + \frac{db}{dx} (y-b) \frac{d}{dx} \phi_0 + O(\varepsilon^3 \phi_0) \quad (14)$$

が得られる。上層の場合の (12) 式と違って、右辺第 4 項として海底勾配を表わす項がつけ加わっていることに注目すべきである。

7. 線型近似の解

さて以上に述べた各条件を満たす解を求めるのであるが、その第 1 歩として線型近似の範囲での議論から始めることにする。線型近似では、波を表わす 4 つの物理量 η, ϕ, u, v に関する 2 次以上の積の項はすべて無視される。すなわち、(5-a), (5-b), (6) の三つの境界条件は、それぞれ、

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{at } y = h + b, \quad (15-a)$$

$$v' = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{at } y = h + b, \quad (15-b)$$

および、

$$\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) = g\eta(\rho - \rho') \quad \text{at } y = h + b \quad (16)$$

となる。速度ポテンシャル ϕ, ϕ' は、(12), (14) 各式の最初の 2 項のみ採用し、 $O(\varepsilon^2 \phi_0), O(\varepsilon^2 \phi'_0)$ 以下の項を省略する。(15-a), (15-b) 式を速度ポテンシャルで書き換えると、

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi_0 = \frac{1}{h} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (17-a)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi'_0 = \frac{1}{h'} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (17-b)$$

となる。(16) 式中の速度ポテンシャルとして (12), (14) 式の第 1 項のみ取って代入し、(17-a), (17-b) の両式によってこれらを消去すると、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (18)$$

という波動方程式が得られる。ここで c_0 は波速を表わす。線型近似の範囲での波速という意味で、添え文字 0 をつけておく。 c_0 の値は (2) 式で与えられる。(2) を見ればわかるように c_0 は波数の関数ではない。したがって表面波における長波の場合と同じく、(18) 式の解は非分散性の波である。(18) 式の解は周知のように、波速 c_0 で正方向へ伝わる波と、負方向へ伝わる波の和で表わされる。外洋から大陸棚へやって来る波について考えているときには、正の方向へ伝わる成分のみ議論をすれば十分である。このときには (18) 式を満たす解のうち

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (19)$$

を満足する方の解が議論の対象となる。

(19) の関係を (17-a), (17-b) に代入し, x で積分すれば, u, u' が η で表わされて

$$u_0 = -\frac{\partial}{\partial x} \phi_0 = c_0 \eta_0 / h \quad (20-a)$$

$$u'_0 = -\frac{\partial}{\partial x} \phi'_0 = -c_0 \eta'_0 / h' \quad (20-b)$$

が得られる。いずれも添文字 0 は線型近似の量であることを表わしている。

(20-a), (20-b) を出すときのように, 被積分関数に直接・間接に b , あるいは h が含まれている場合, $-\infty$ から x までの定積分をした結果, オーダーの繰り上がりが生ずる可能性があることに注意する。つまり,

$$\frac{db}{dx} = O(\varepsilon^{3/2})$$

ではあっても, この左辺を上述の定積分をした値は

$$[b]_{-\infty}^x = h - [h]_{x=-\infty} = O(\varepsilon^0 H^1)$$

なるオーダーの量となるからである。

8. 非線型第 1 近似解

非線型の解を求めるためには, 躍層面と海底での各条件 (5-a), (5-b), (6), (7), および速度ポテンシャルの展開式 (12), (14) のすべてにおいて, 線型理論のときより ε について 1 次だけ高次の項まで採用しなければならない。また躍層面での条件については, 近似的に $y = h + b$ での値で代用したが, これも $y = h + b + \eta$ での値を用いなければならない。

まず (5-a), (5-b) の左辺に現われる v, v' を所要の精度まで計算すると, $y = h + b + \eta$ において,

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &= h \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^4 \Phi_0}{\partial x^4} - \frac{db}{dx} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + O(\varepsilon^3 H^1 T^{-1}) \end{aligned}$$

となる。右辺第 2, 3, 4 の各項は第 1 項より ε^1 だけ高次の項であるから, これらの項を前節の線形理論で得た (20-a), (20-b) を使って変数を η に書き換えても精度は落ちない。すなわち,

$$v = h \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} - \frac{c_0}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{db}{dx} \frac{c_0}{h} \eta + O(\varepsilon^3 H^1 T^{-1})$$

が得られる。同様に v' についても

$$v' = -h' \frac{\partial^2 \Phi'_0}{\partial x^2} + \frac{c_0}{h'} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h'^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\varepsilon^3 H^1 T^{-1})$$

が得られる。これらを (5-a), (5-b) に代入すれば、それぞれ、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - h \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + c_0 \left(\frac{2}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{1}{h} \frac{db}{dx} \eta \right) = 0, \quad (21-a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h' \frac{\partial^2 \Phi'_0}{\partial x^2} + c_0 \left(-\frac{2}{h'} \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{h'^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (21-b)$$

が得られる。

つぎに圧力の連続条件である (6) 式について考える。ε について 1 次の項までを採用する。両辺の第 4 項 v^2 , v'^2 の項は無視できる。第 3 項は ε について 1 次の項だから、(20-a), (20-b) を用いて η で書き換えることができて、

$$\frac{1}{2} u^2 = \frac{c_0^2}{2h^2} \eta^2, \quad \text{および} \quad \frac{1}{2} u'^2 = \frac{c_0}{2h'^2} \eta^2$$

となる。第 1 項は、(12), (14) を代入し、ε の 1 次の項については、上と同様の書き換えを行ない、さらに (19) 式を使うと、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - \frac{c_0^2 h}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \text{および} \quad \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \frac{\partial \Phi'_0}{\partial t} + \frac{c_0^2 h}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

が得られる。これらの関係を使うと (6) 式は結局、

$$g\eta(\rho - \rho') - \left(\rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - \rho' \frac{\partial \Phi'_0}{\partial t} \right) + \frac{c_0^2}{2} \left\{ (\rho h + \rho' h') \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(\frac{\rho}{h^2} - \frac{\rho'}{h'^2} \right) \eta^2 \right\} = 0 \quad (22)$$

となる。(21-a), (21-b), (22) から Φ_0 , Φ'_0 を消去し、高次の項に対しては演算子 $\partial/\partial t$ を $-c_0 \partial/\partial x$ に置き換えることができるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + c_0^2 \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{h^2} - \frac{\rho'}{h'^2} \right) \eta^2 + \frac{1}{3} (\rho h + \rho' h') \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right\} \right. \\ \left. - \frac{\rho}{h^2} \frac{db}{dx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。この式と線型近似の解を求めて得られた (18) 式とを比較すると、右辺第 2 項以下の、大かっこでくくられた非線型項を含んだ部分がつけ加わっていることがわかる。この式は形式的には、 t についての 2 階偏微分方程式であるので、やはり正負の方向へ伝わる 2 種類の波の解を含んでいる。いま (18) 式から (19) 式を求めたときと同様に、(23) 式から、正方向に伝わる波のみを表わす、(23) 式と対等な式を求めると (計算手順は付録参照)、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{h^2} - \frac{\rho'}{h'^2} \right) \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} (\rho h + \rho' h') \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{\rho}{4h^2} \frac{db}{dx} \eta \right\} = 0 \quad (24)$$

が得られる。結局この (24) 式が、2 層の浅い海を伝わる長波性の内部を規定する式となる。大陸棚外縁での刻々の条件を与えたとき、大陸棚海域を陸に向かってゆく内部波の様子は、こ

の式を時間積分することにより求めることができる。

この (24) 式は、一般に KdV 方程式と呼ばれるものの一種である。この KdV 方程式の持つ一般的な性質については、節を改めて述べることにする。

(24) 式において、 $\rho'=0$ と置き、 $db/dx=-dh/dx$ に注意すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h^3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{h} \frac{dh}{dx} \eta = 0$$

となる。この式は Kakutani (1971) によって求められ、Johnson (1973), Shuto (1973) によって議論された、水深が緩やかに変化する海を伝わる有限振幅表面波に対する KdV 方程式である。

8. KdV 方程式の一般的な性質について

(24) 式の η, x, t に対して次のような変数変換を行なう。

$$X = \int_{-\infty}^x \frac{dx}{c_0} - t, \quad T = t, \\ \zeta = \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} \left(\frac{\rho}{h^2} - \frac{\rho'}{h'^2} \right) \eta \quad (25)$$

さらに、

$$\beta = \frac{1}{6c_0} \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} (\rho h + \rho' h'), \\ \gamma = \frac{1}{4} c_0 \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} \frac{\rho}{h^2} \frac{dh}{dx}$$

と置くと (24) 式は、

$$\zeta_T + \zeta \zeta_X + \beta \zeta_{XXX} + \gamma \zeta = 0 \quad (26)$$

となる。ここで添文字 T, X は、それによる偏微分を表わす。

水深一定の場合には β は定数、 $\gamma=0$ となって、

$$\zeta_T + \zeta \zeta_X + \beta \zeta_{XXX} = 0 \quad (27)$$

が得られる。この式が、Korteweg and de Vries (1895) によって初めて導かれて以来、今日まで数多くの研究がなされている、いわゆる KdV 方程式の標準形である。(27) 式を満たす解のうち定常解、すなわち時間とともに形が変化しない波の解は、 $X-T$ 座標で見たときの波の速度を σ として、 $\partial/\partial T$ を $-\sigma \partial/\partial X$ で置き換えることにより得られる。すなわち、

$$-\sigma \zeta_X + \zeta \zeta_X + \beta \zeta_{XXX} = 0.$$

$X \rightarrow \pm \infty$ で $\zeta=0$ という境界条件を与え、この式を積分する。(27) 式の解として結局

$$\zeta = 3\sigma \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\sigma}{4\beta}} (X - \sigma T) \right\} \quad (28)$$

なる孤立波の式が得られる。変数をもとに戻すと、

$$\eta = 2\sigma \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right) \left(\frac{\rho}{h^2} - \frac{\rho'}{h'^2} \right)^{-1} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2c_0} \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \{x - (1+\sigma)c_0 t\} \right] \quad (29)$$

となる。波の伝播速度は $(1+\sigma)c_0$ である。

(28) 式において、 $4\beta=1$ とし、 $\sigma=0.1, 0.2, 0.5, 1.0$, および 2.0 とした時の波形を図 11 に示す。波形はどれも左右

対称で、中央が最も高く、

1山型であり、孤立波とよ

ばれるゆえんである。パラ

メータ σ が決まると、中央

における波高と、広がり

の程度、伝播速度の3つが同

時に定まってしまう。逆に

いうと波高が決まれば波の

広がり

の程度と波速が決ま

ってしまう。高い波など幅

がせまく波速の大きい波と

なり、逆に低い波ほど幅の広い、波速の小さい波となる。波高 $\rightarrow 0$ の極限では、波速は c_0 となって、線型近似での値に帰する。波高が有限である限り、孤立波の波速は必ずこの線型近似の値より大きい値となる。

それでは、 $T=0$ での初期条件として、

式で表わされる孤立波と、同じ高さを持ちながら、幅がこれより広い波を与えた場合、

どうなるであろうか。当然、このような波は、初めての形を保ったまま、伝わることはない。Madsen ら (1969), Zabusky ら (1971) などによると、このような場合、波は進行する途中で、いくつかの孤立波に分裂してゆく。その様子は、図 12 に模式的に示されるように、前方から順次孤立波が産み出される。そして最初に産み出されるものほど背が高く、幅が狭く、速度が速く、あとで産み出されるものほど背が低く、幅が広く、速度が遅い孤立波となる。そしていくつかの孤立波が産み出された後には、孤立波を作り出すことのできない部分が、さざ波となってとり残される。どのような初期条件のとき、いくつかの孤立波に分裂するかについては Lax (1968) の研究がある。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さい

た。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さい

た。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さい

た。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さい

た。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さい

た。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さい

た。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さい

た。

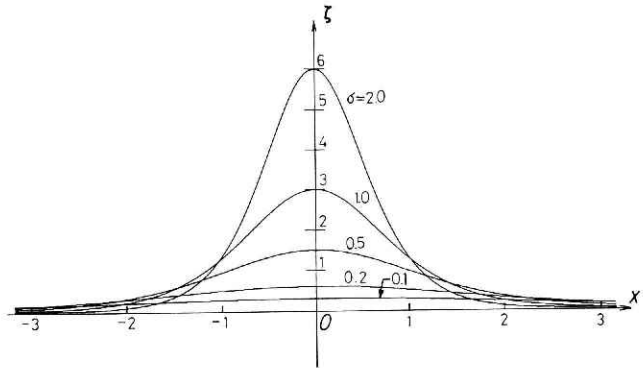


図 11 孤立波の形。 $\zeta=3\sigma \operatorname{sech}^2 \sqrt{\sigma} x$ の $\sigma=0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ および 2.0 の各場合の形。

Fig. 11 Forms of solitary wave; $\zeta=3\sigma \operatorname{sech}^2 \sqrt{\sigma} x$, for the case of $\sigma=0.1, 0.2, 0.5, 1.0$, and 2.0 .

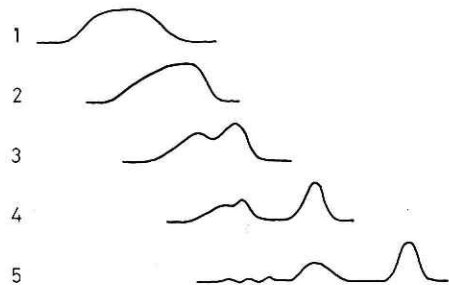


図 12 孤立波分解の模式図。

Fig. 12 Schematic drawing of 'solitary wave fission'.

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さいた。

先に分裂した背の高い孤立波ほど波速が大きく、後の背の低い孤立波ほど波速が小さいた。

め、分裂した後、各孤立波は、お互いの間隔を広げてゆくことになる。

以上述べたような孤立波分裂の現象は、KdV 方程式によって支配される系において著しい特色をなすものである。

水深が一定でない時には、波形不変のまま定常的に伝わる孤立波というものは存在しない。しかし水深の変化が緩やかであれば、ローカルには定常的な孤立波は存在しうる。しかし長く伝わるうちに水深が変わると、もはやその水深での定常的な孤立波ではなくなる。そうになるとその海域で、上に述べた孤立波分裂がおこる可能性がでてくる。Madsen ら (1969) は、有限振幅の表面浅海波について、この問題を論じている。

以上の議論は表面波であれ内部波であれば成立する。

表面波の場合、孤立波は常に図のように上向きにとがり出した形をとる。ところが内部波の孤立波の場合には、条件により下にとがり出すこともありうる。(29) の右辺の前にかかる係数のうち $(\rho/h^2 - \rho'/h'^2)^{-1}$ 係数のうちの正負に応じて、上下どちらにとがり出すかが決まってくる。 ρ と ρ' とは通常の海では 10^{-3} 程度の差しかないから、ほぼ h と h' の大小に応じて決まる。すなわち、上層が下層より厚さが大きいときには上に、逆のときには下にとがり出す。図 13、図 14 は、この二つの場合の実験写真である。

$(\rho/h^2 - \rho'/h'^2)$ がほぼ 0 の場合には、(24) 式中の非線型項がほぼ消えてしまい、正弦曲線に近い波形の内部波が安定した形を保って伝播する。

さて KdV 方程式の支配する系における孤立波分裂の以上に述べた、各特徴は、まさに Apel らの観測したウェーブ・パケットのもつ特徴に相応している。すなわち節で述べた (a) の特徴である、パケットの前方のすじほど鮮明であることは早い時点で前方から分裂した孤立波ほど、波高が高いことに相応し、(c) の特徴、陸に近いパケットほどすじとすじの間隔が広いことは、分裂した各孤立波相互の間隔が時とともに広がってゆくことに相応しているのである。

さらに、分裂する孤立波の波高が発生する順に幾何級数的であることが確かめられれば、(b) の特徴も説明がつくことになる。

さて、定性的には、ウェーブ・パケットの形成は、KdV 方程式によって支配される系における、2 層内部波の孤立波分裂であるらしいという予想が立てられた。以下の節では、このことを定量的に確かめるために、数値計算を行なうのであるが、その前に、数値計算結果のチェックの手段として、KdV 方程式によって支配される運動系の、保存量について述べておくことにしよう。

10. KdV 方程式によって支配される運動系における保存量について

(24) 式の 1 次微小項である左辺の後 3 項の係数を P, Q, R とおき、この式を、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + P \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + R \eta = 0$$

と表わす。簡単な計算によって、

$$\frac{dc_0}{dx} = 2R$$

であることがわかる。この関係は以下での積分の計算の際、しばしば使われる。また P, Q, R は x 方向に緩やかに変化する数であるが、1 次微小量であるので、 $(-\infty, \infty)$ の間の定積分をする際には定数として扱ってもよい。ただし第2項の係数 c_0 のみは、第0次項であって、しかも7節で述べたような、定積分によるオーダーの繰り上がりが生ずる可能性があつて、定数と考えることはできない。以下に出てくる積分の上限と下限は $\pm\infty$ としてあるが、実際には内部波の運動の影響の及ぶ範囲にわたる積分を意味すると解してよい。

以上のことを念頭に置いて、まず平均躍層水深レベルより上に出ている下層水の総量 M の時間変化を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + P \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + R \eta \right) dx \\ &= - \left[c_0 \eta + \frac{1}{2} P \eta^2 + Q \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\eta \frac{dc_0}{dx} - R \eta \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R \eta dx \end{aligned} \quad (31)$$

となる。水深一定の場合にはこの値は 0、すなわち M は時間的に不変な量となる。

次にこの内部波の持つポテンシャルエネルギーの総量 E の時間的変化は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(\rho-\rho')} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \eta \left(c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + P \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + R \eta \right) dx \\ &= - \left[c_0 \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{3} P \eta^3 + \frac{1}{2} Q \left\{ 2\eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \left(\frac{1}{2} \frac{dc_0}{dx} - R \right) dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

となつて、ポテンシャルエネルギー E は一定値を保存することが判明する。

ある初期条件のもとに、数値計算により(24)の解を時間積分して求めて行く際、数値打ち切り誤差の累積、差分計算の有効桁落ちなどのために、解析的な意味での厳密解に相応するような、合理的な数値解が得られるとは限らない。 M, E に関する二つの保存関係(31), (32)は、数値計算の結果をチェックする有力な手段となる。

11. 数 値 計 算

ニューヨーク沖の観測データに対応する数値計算を行なった。計算に用いた海のモデルを図15に示す。観測結果から、図1の写真が得られた時期には、 $h'=50\text{ m}$ 、 $\rho'/\rho=10^{-8}$ であることがわかっている。海底の形は、水深 100 m の平坦な部分(図の AB 間)と、図の C 点に頂点を持つような放物線で表わされる部分(BC 間)よりなる。AB 間の長さは、ちょうど半日周潮に等しい 12.4 時間を周期とする内部波が 1 波長分入るよう、22.1 km とし、初期

条件として高さ 10 m の正弦曲線形の内部波がある状態を与えた。

図の B 点に相当する水深 100 m の所では $h=h'=50$ m となり, (24) 式の非線型項である第 3 項がほぼ 0 となる。したがって, 9 節で述べたような事情で, 潮汐によって誘起された半日周期の長い正弦波形の内部波が, ほぼ形を変えることなく, この水深 100 m の海域に達すると考えられる。このよう

なことから A B 間は実際の海底の形とは異なる, 水深一定な海を設定した。

計算に用いた格子間隔は, 100 m とし, AC 間に 1001 点を設定した。タイムステップは, 最も深い A B 間でも計算不安定を生じないように 2 分とした。数値積分はリープ・フロッグ法によったが, 1 ステップごとに時間に関する前

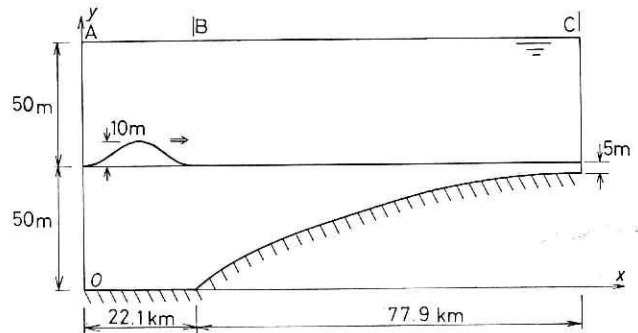


図 15 数値計算に用いた 2 層の海のモデルと, 内部波の初期条件。

Fig. 15 Our model of the two layered sea, and the initial displacement for the internal wave.

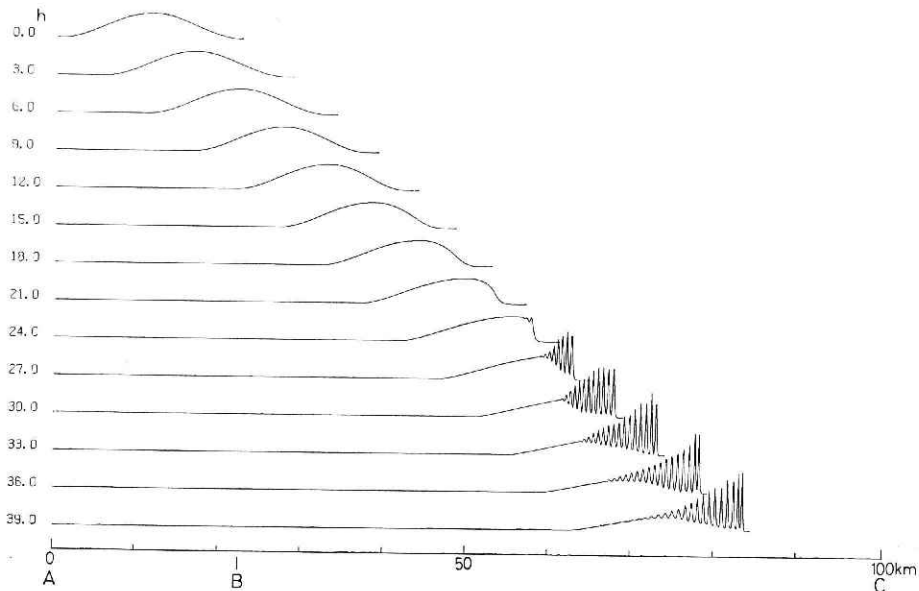


図 16 数値計算結果。左端の数字は経過時間, 曲線は各時間での波の位置と形状を示す。下の A, B, C はおのおの図 15 の各位置を示している。

Fig. 16 The results of numerical calculation of the internal solitary wave fission. Figures in the left hand side column show the time elapsed, and each curve shows the displacement of the interface. Points A, B, and C correspond to those in Fig. 15.

方差分値と後方差分値を計算し、その平均値を採用して次のステップでの値を求めた。丸めや桁落ちによる誤差のチェックは、エネルギー保存を示す(32)の關係を用いて行ない、誤差が累積して、エネルギーの値がもとの2%以上変化した時は、(5%, 90%, 5%)なるフィルターによるスムージング操作、および絶対値修正を行なうことにより補正した。

以上の手続きによって計算した結果を図16に示す。図において左端の数字は経過時間で、各曲線がその時刻における波の位置と形を示す。下に併記したA, B, Cは図15での各位置に対応している。

初めのうちは、前後対称であった1山形の内部波も、次第に前面が急勾配となり、約24時間を経過したところから、その前面から次々と内部波が分裂している。すなわち単一の長い波から、ウェーブ・パケットが形成されることが定量的にもありうることが判明する。また前に位置する孤立波ほど、背が高くなっている。すなわち3節で述べた(a)の特徴が数値的に再現されている。

この分裂した孤立波の、その後のふるまいを論ずるには、ここで用いた数値計算の格子が粗すぎたために、今回は良い結果は得られなかったが、(30)式に示されるように、背の高い前の方の孤立波は速く、後方の背の低い孤立波は遅く進行するため、しだいに孤立波間の距離が広がるはずであることから、この数値計算結果は、(c)の特徴も裏付けるものであるといえることができる。

数値計算では、水深65mのあたりで孤立波分裂が起こりはじめている。図1の写真では、水深75mのあたりからウェーブ・パケットが観測されている。この差が生じた原因として、(1)初期条件が実際と合ったものではなかった、(2)水深100m以深の海域での状況が計算に入っていない、(3)躍層面での大きなシアーの存在は孤立波分裂を促す傾向を持つが、この影響が数値計算では反映していないため、などいろいろ考えられるが、結局ははっきりしたことはわからない。

3節に述べた(b)の特徴を裏付ける結果は、遺憾ながら特に得られなかった。

これらの諸点を明らかにするためには、分裂後の孤立波の1波1波を十分多くの格子点によって表現されるような、より小さな格子間隔による数値計算を、より多くのケースについて行ない、さらに室内実験など合わせて行うことが必要となろう。

ケープタウン近海の図2のデータについては、海域実地観測がなく、躍層の深さ、上下層の密度差のデータがないため、数値計算は行なわなかった。こちらのケースでも、内部波は100m以浅の海域まで侵入していることから、躍層はやはり水深数10mの所にあると推定され、しかもウェーブ・パケットの形成が500m以深の海域で始まっているから、(24)式中の非線型項の係数が負、すなわち、ニューヨーク沖の場合とは異り、図14の室内実験写真に見られるような、下にとがり出した倒立型孤立波による孤立波分裂が生じたものと推定される。

12. む す び

Apel ら (1975) が大陸棚海域の衛星写真上に発見したうろこ状のしま模様は、躍層を伝わる内部波の波群であって、それは潮汐によって誘起された半日周潮の内部波の非線型性に基づく孤立波分裂の結果生じたものであるらしいということが、以上の考察から立証された。

躍層をはさむ上下二つの海水の混合には、そこを伝わる内部波が大きな役割りを果たすが、波長の短い内部波ほど、この混合を促進する効果が大きい (都司, 1975)。つまり、この内部波の孤立波分裂の現象は、潮汐のエネルギーの一部を、効率よく海水混合にふり向ける機能を果たしているということができるであろう。

13. 謝 辞

KdV 方程式に関する多くのご教示をいただいた理化学研究所の長島秀樹氏、および中央大学工学部の首藤伸夫教授に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Apel, J. R., H. M. Byrne, J. R. Proni, and R. L. Chartell (1975): Observations of oceanic internal and surface waves from the Earth Resources Technology satellite. *J. Geophys. Res.*, **80**, 865-881.
- 2) Benjamin, T. B. (1966): Internal waves of finite amplitude and permanent form. *J. Fluid Mech.*, **25**, 241-270.
- 3) Cox, C. and H. Sandstrom (1962): Coupling of internal and surface waves in water of variable depth. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 20th anniversary volume.
- 4) Defant, A. (1961) *Physical Oceanography*, 2, Pergamon Press, Oxford.
- 5) Ewing, G. (1950): Slicks, surface films and internal waves. *J. Mar. Res.*, **9**, 161-187.
- 6) Johnson, R. S. (1973): On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **73**, 183-203.
- 7) Kakutani, T. (1971): Effect of an uneven bottom on gravity waves. *J. Phys. Soc. Japan* **30**, 272-276.
- 8) Keulegan, G. H. (1953): Characteristics of internal solitary waves. *J. Res. Bureau of Standards*, **51**, 133-138.
- 9) Korteweg, D. J. and G. de Vries (1895): On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave. *Phil. Mag.*, **5** (39), 422-433.
- 10) Lax, P. D. (1969): Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communi. on Pure and Appl. Math.*, **11**, 467-490.
- 11) Long, R. R. (1956): Solitary waves in one- and two fluid systems. *Tellus*, **8**, 460-471.
- 12) Madsen, O. S. and C. C. Mei (1969): Transformation of a solitary wave over an uneven bottom. *J. Fluid Mech.*, **39**, 781-791.
- 13) Miura, R. M., C. S. Gardner, and D. M. Kruskal (1967): Korteweg de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.*, **9**, 1204-1209.
- 14) Shuto, (1973): Shoaling and deformation of nonlinear long waves. *Coast. Eng. Japan*, **16**, 1-12.
- 15) Tsuji, Y. and Y. Nagata (1974): Linear theory for internal waves in a multilayered ocean. *La Mer*, **12**, 171-185.
- 16) 都司嘉宣 (1975): 水温躍層を伝わる内部波の減衰. 国立防災科学技術センター研究報告, **11**, 49-66.
- 17) Zabusky, N. J. and C. J. Galvin (1971): Shallow water waves, the Korteweg-de vries equation and solitons. *J. Fluid Mech.*, **25**, 241-270.

(1976 年 10 月 27 日原稿受理)

付 録: (23) 式より (24) 式を導き出す計算手順.

(23) 式を

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + c_0^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + c_0^2 B \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A-1})$$

と書く. ここで

$$A = \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{h^2} - \frac{\rho'}{h'^2} \right) \eta^2 + \frac{1}{3} (\rho h + \rho' h') \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right\},$$

$$B = -\frac{\rho}{h^2} \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} \frac{db}{dx}$$

である. いま (A-1) は正および負方向に伝わる二つの波の解を含んでいるが, そのうち正方向に伝わる波を表わす方程式を求めるため,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial}{\partial x} \{ \eta + F(\eta) \} \quad (\text{A-2})$$

と置く. ここで $F(\eta)$ は $O(\varepsilon \eta)$ の量とする. (A-1) に代入してで積分し, $\partial c_0 / \partial x = -2B$ に注意すると,

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\eta + F) = c_0 \frac{\partial}{\partial x} (\eta + A) - \frac{c_0}{2} B \eta \quad (\text{A-3})$$

が得られる. もう一度 (A-2) を代入して

$$c_0 \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} = c_0 \frac{\partial A}{\partial x} - c_0 \frac{B}{2} \eta$$

となる. F に対しては $\partial / \partial t = -c_0 \partial / \partial x$ と演算子を置き換えてもよいから,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{B}{4} \eta$$

となる. これを (A-2) に代入して A, B をもとの変数に戻すと,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \left(\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'} \right)^{-1} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{h^2} - \frac{\rho'}{h'^2} \right) \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} (\rho h + \rho' h') \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{\rho}{4h^2} \frac{db}{dx} \eta \right\} = 0 \quad (\text{A-4})$$

となって (24) 式が得られた.