

水温躍層を伝わる内部波の減衰

著者	都司 嘉宣
雑誌名	国立防災科学技術センター 研究報告
巻	11
ページ	49-66
発行年	1975-08
URL	http://doi.org/10.24732/nied.00000707

水温躍層を伝わる内部波の減衰

都 司 嘉 宣

国立防災科学技術センター平塚支所

Decay Time of Internal Waves Propagating in the Oceanic Thermocline

By

Yoshinobu Tsuji

Hiratsuka Branch, National Research Center for Disaster Prevention

Abstract

The decay time of internal waves is estimated on the assumption that the vertical distribution of density in the oceanic thermocline is described with the function $\rho = \rho_0 - \Delta\rho \tanh \beta y$, which is very similar to the error function. It has become cleared that the decay time of internal waves depends on the thickness of the thermocline to a large extent. It is presumable that the magnitude of life time of internal waves propagating in the thermocline does not exceed ten days, and that its propagating distance is not longer than 100 kilometers. The formulae mentioned here can be adopted for estimation of decay time of internal waves of another scale.

1. 序 論

1.1 研究の目的

1973年5月15日から6月8日までの25日間にわたって、気団変質観測計画 (AMTEX) の予備観測として、白鳳丸 (東京大学海洋研究所) による KH-73-3 次航海が行なわれ、東支那海での黒潮の構造に関する各分野からの観測がなされた。筆者はそのうち海洋物理部門の STD (塩分・水温・水深測定装置) による観測チーム*の一員としてこの航海に参加した。そのとき得られたデータは、現在、東京大学海洋研究所、京都大学理学部、東北大学理学部などに持ち帰られ、処理検討されていて、いずれ各研究機関からその成果が発表されるであろう。この観測期間中5月24日から25日にかけて、中国大陸の大陸棚上の定点 E (28°10'N, 123°10'E) にアンカーされた (図 1)。ここで 24 日 15 時から 25 日 15 時までの間に、2

* このチームは永田豊氏 (東京大学理学部) をチーフとし、東京大学海洋研究所、京都大学理学部、東北大学理学部の海洋研究者により構成されていた。参考文献 4) を参照。

時間おきに 13 回の STD 観測が行なわれ、これと並行して筆者は、水深 58 m の層の水温の、サーミスタによる連続測定を行なった。図 2 は 5 月 24 日 17 時 00 分～08 分に行なわれた、STD 観測の記録結果で、細実線は水温、点線は塩分、太実線はこれから算出した σ_t ($=(\text{密度}-1) \times 1,000$) の値である。ほぼ水深 63 m を中心として厚さ 10 m 程度の顕著な躍層構造が記録されている。矢印はサーミスタの設置された水深を示している。躍層では水温、塩分、密度とも急変している。サーミスタはこの躍層の上端に位置していることになる。図 3 は、STD によって図 2 の記録が得られた時刻の前後 2 時間、すなわち 24 日 16 時から 18 時にかけての、このサーミスタによる水温の連続測定記録である。数分から十数分を周期とする内部波が何波も通過し、サーミスタの位置まで躍層が上昇してきたことが記録されている。

このような内部波は、近年 Woods (1968, 1969), Cox (1969), Osborn (1969) らによって観測された、躍層中の微細な温度の階段状分布構造の形成の一つの原因と考えられている。このような内部波が存在するために、躍層をはさむ水温、塩分、密度の異なる二つの水塊が、躍層の所で大きなシヤーを受け、これらの水塊の混合が促進され、これら二つの



図 1 白鳳丸による KH-73-3 次航海での定点 E の位置

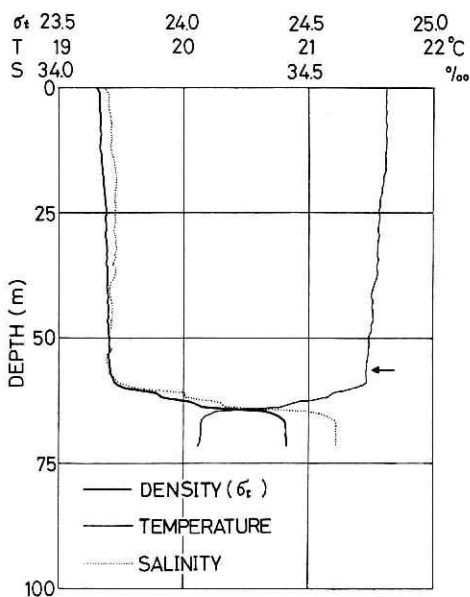


図 2 定点 E における STD 降下時の記録。1973 年 5 月 24 日 17 時 00 分～08 分。細実線は水温、点線は塩分、太実線は σ_t をそれぞれ表す。矢印はサーミスタによる水温連続観測位置。

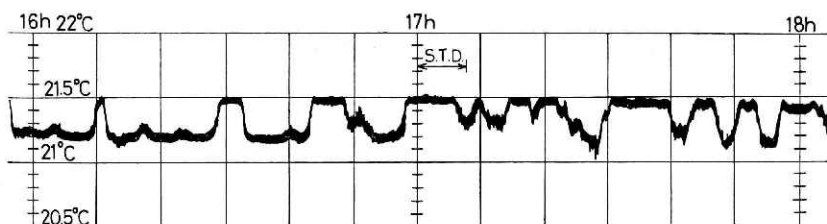


図 3 定点 E、水深 58 m でのサーミスタによる水温連続記録。5 月 24 日 16 時～18 時。↔印は STD 観測中。

水塊の中間の水温、塩分、密度を持つ水が現われ、上述の構造ができるのである。

ここではこのような内部波が、粘性により、伝搬するうちにどの程度減衰するかを理論的に考察し、内部波とはどのくらいの時間・空間スケールの現象であるのかを考えることにしたい。ここで観測されたような内部波現象では、粘性の大きさは、分子粘性の値 ($\nu=1.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, 15°C) ではなく、その 100 倍ないし 1,000 倍程度の乱流のうず粘性係数を用いる方が合理的であると考えられる。以下に述べる内部波の減衰の結果、内部波のエネルギーは、躍層内のうずのエネルギーとなり、躍層をはさむ上下の水塊の混合に貢献し、最終的にはうずのエネルギーは分子粘性によって熱になってしまう。

また、Woods (1969) によれば、先に述べたような躍層中の微細な多層構造の各境界面にも、ここを伝わる小さなスケールの内部波が存在することが観測されているが、このような内部波に対しても、ここで導かれる減衰についての諸公式を適用することができる。この場合には、内部波のエネルギーの大部分は直接分子粘性によって消滅すると考えられ、したがって、粘性係数の値も分子粘性係数の値そのものに近い数値を用いてよいであろう。

1.2 海洋構造のモデル化

図 2 の密度構造をそのまま解析的に扱うことはできないので、できるだけこれに近い関数形を、密度分布のモデルとして与えなくてはならない。一番単純には、躍層の厚さを無視し、躍層をはさんで各々密度の一定な上下層が直接接しあっているという、いわゆる 2 層モデルとして扱うことが考えられる。Johns and Cross (1969) はこのモデルで内部波の減衰を論じている。実際には躍層の厚さが有限であるのに、このような取り扱いをすると、理論上内部波によってその密度境界面のごく近くで、きわめて大きな架空のシャーが現われることになる。波のエネルギーは、主としてこの架空のシャーによる内部摩擦によって失われるかのような見積もりをしてしまうことになる。その結果、内部波エネルギーの消滅量は実際よりも相当大きく評価されることになるのである。

この躍層の密度構造が、これをはさむ上下両層の拡散によって形成されたものであるならば、これを誤差関数で近似するのが合理的である。しかし誤差関数は解析的な取り扱いがめんどうであるので、ここではこれとよく似た双曲線正接関数で近似することにする。図 4 には各々正規化した誤差関数と双曲線正接関数を、図 5 にはそれらの微分形である正規分布関数と弧立波関数とを比較して示してある。

ここでは非線形項を無視し、非粘性としての解を第 0 近似として、粘性項を一次微小量と考えた摂動法によって内部波の粘性による減衰の公式を導くことにする。付録として、Johns and Cross の内部波減衰理論を、2 層モデルの場合に即して略述し、ここで扱う方法との異同、可

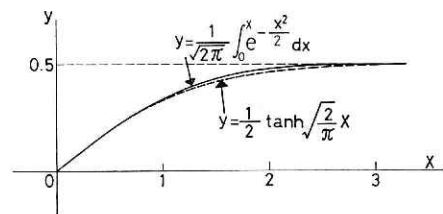


図 4 誤差関数（実線）と双曲線正接関数（破線）の比較

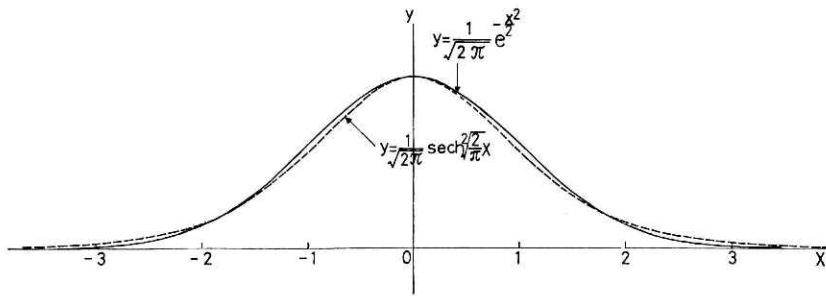
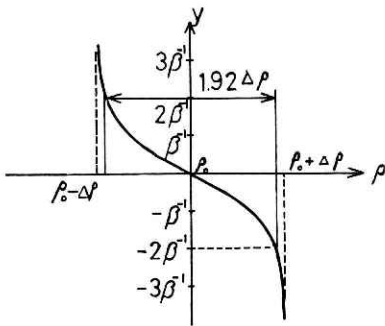


図5 正規分布関数（実線）と孤立波関数（破線）の比較


 図6 密度分布 $\rho = \rho_0 - \Delta\rho \tanh \beta y$ の図

否について述べることにする。

2. 基本方程式と境界条件

内部波の進行方向・水平に x 軸をとり、鉛直上方に y 軸をとり、原点を躍層の中央におく。躍層をはさむ上下の均一層の密度の差を $2\Delta\rho$ とすると、躍層の密度構造はほぼ

$$\rho = \rho_0 - \Delta\rho \tanh \beta y \quad (1)$$

で近似される。ここに ρ_0 は上下均一密度層の密度の平均値、 β はこの躍層の厚さを表わす数である。

実質的には $4\beta^{-1}$ がほぼ躍層の厚さであると考えて差し支えない（図6参照）。

以下問題を二次元の現象に限定する。以下に出てくる諸式のベクトル記号もすべて二次元のそれを表わすことにする。

運動方程式のすべての項を省略せずに書くと

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\rho g \nabla y - \nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (2)$$

連続の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

拡散を無視することにすれば*

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (4)$$

となる。以上の諸式で $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ 、 $\mathbf{u}$ は速度ベクトル (u, v) 、 g は重力加速度、 p は圧力、 μ は粘性係数である。

(3) の条件より流れ関数 ϕ を考えることができて

* 乱流のうずによる混合の影響の強いときには、拡散は粘性に対して必ずしも無視できない。しかし内部波の寿命を見積もる、以下の議論に対しては、躍層の密度分布構造がこれによって大きく変化してこない限りこの影響はさほど大きくないと考えられる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

となる。(2) に交換微分 (cross differential) をとり、速度をすべて流れ関数で表わせば

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi + J(\nabla^2 \phi, \phi) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} + J\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}, \phi\right) \right] \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + J\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \phi\right) \right] = g \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \nabla^2 (\nabla^2 \phi). \end{aligned} \quad (2)'$$

ここで ν は動粘性係数であって $\nu = \mu/\rho$ である。動粘性係数は全流体について一定であると仮定した。 $J(f, g)$ はヤコビ行列式である。

(4) を流れ関数で書き直すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + J(\rho, \phi) = 0. \quad (4)'$$

密度を、内部波がない静かな状態のときの値 $\bar{\rho}$ と、内部波が存在することによって生じた変動分 ρ' とに分ければ

$$\rho = \bar{\rho}(y) + \rho'(x, y, t)$$

となる。(4)' のうち非線形項 $-(\partial \rho'/\partial x) \times (\partial \phi/\partial y)$ と $(\partial \rho'/\partial y) \times (\partial \phi/\partial x)$ を省略すれば

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{d\bar{\rho}}{dy} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4)''$$

を得る。

(2)' の中で、非線形項と、重力加速度 g との積の形で入っているもの以外の ρ' の微分項を省略し (ブシネスク (Boussinesq) 近似), さらに全体を t で微分して (4)'' を使えば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \phi - \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (\nabla^2 \phi). \quad (5)$$

密度分布 $\bar{\rho}(y)$ として (1) 式を代入すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \phi + \frac{g\beta\Delta\rho}{\rho_0} \text{sech}^2 \beta y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (\nabla^2 \phi). \quad (5)'$$

ここでブシネスク近似の範囲内で左辺第2項の分母 ρ を ρ_0 で置き換えた。(5)' が解くべき基本方程式である。

表層混合層の厚さ、つまり躍層の上端から海面までの距離は、実際には有限であるが、便宜上これを無限の厚さがあるものとみなすことにする。このことの妥当性は後に論ずる。躍層より深い方の層厚も無限大とする。この上下の無限遠方での条件は、内部波の運動の影響がそこまで及ばないことから、そこでの流速は 0、すなわち $y = \pm\infty$ において

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

さらに非線形性の影響を無視しているのだから、この内部波の質量輸送もないと考えることにする。したがって

$$[\phi]_{y=\infty}=[\phi]_{y=-\infty}. \quad (7)$$

(5) が解くべき基本方程式, (6), (7) が上下無限遠での境界条件となる. われわれはまず次の節で, 第0近似として粘性項を無視した, 減衰することなく定常的に伝搬する内部波の特性を述べ, 4節で微小量としての粘性項が加わることにより, この内部波がどのように減衰してゆくかを調べることにする.

3. 粘性項を無視した場合の内部波の特性

流れ関数を

$$\phi=\Psi_0(y)e^{i(kx-\sigma_0 t)} \quad (8)$$

の形に置く.

ここで k は内部波の波数, σ_0 は角振動数で, 非粘性 (第0近似) の意味で添え字0を付ける. 以下に現われる物理量のうち, 複素数が現われたときは, その実部が現実の現象を表わしているものとする. (5)' の右辺の粘性項を無視し, (8) 式を代入すれば

$$\frac{d^2\Psi_0}{dy^2}-\left\{k^2-\frac{g\beta}{c_0^2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)\operatorname{sech}^2\beta y\right\}\Psi_0=0. \quad (9)$$

ここで c_0 は位相速度で, $c_0=\sigma_0/k$ である.

この式は, 一群の微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}-\{n^2-l(l-1)\operatorname{sech}^2z+m(m-1)\operatorname{cosech}^2z\}w=0 \quad (10)$$

の特別な場合に相当する. この (10) を解くにはまず

$$w=\chi(\xi)(\cosh z)^l(\sinh z)^m, \quad \xi=\cosh^2 z \quad (11)$$

と置けば, $\chi(\xi)$ は微分方程式

$$\xi(\xi-1)\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+\left\{(l+m+1)\xi-\left(l+\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{d\chi}{d\xi}+\frac{l+m+n}{2}\cdot\frac{l+m-n}{2}\chi=0 \quad (12)$$

を満たさなくてはならない.

この式の $\xi=\infty$ のまわりの基本解は

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \xi^{-(1/2)(l+m+n)} F\left(\frac{1}{2}(l+m+n), \frac{1}{2}(-l+m+n+1); (n+1); \xi^{-1}\right), \\ \chi_2 &= \xi^{-(1/2)(l+m-n)} F\left(\frac{1}{2}(l+m-n), \frac{1}{2}(-l-m-n+1); (-n+1); \xi^{-1}\right) \end{aligned}$$

で与えられる (岩波全書, 数学公式 III, § 16 (ii) の XXIII, XXIV 参照). ここで $F(a, b; c; z)$ は超幾何関数である. したがって (10) の解の基本系は

$$w_1 = \xi^{-(1/2)n} \left(\frac{\xi-1}{\xi}\right)^{(1/2)m} F\left(\frac{1}{2}(l+m+n), \frac{1}{2}(-l+m+n+1); (n+1); \xi^{-1}\right), \quad (13a)$$

$$w_2 = \xi^{(1/2)n} \left(\frac{\xi-1}{\xi}\right)^{(1/2)m} F\left(\frac{1}{2}(l+m-n), \frac{1}{2}(-l-m-n+1); (-n+1); \xi^{-1}\right), \quad (13b)$$

$$\xi = \cosh^2 z$$

となる. ここに得られた解をわれわれの解くべき (9) に当てはめるには

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C_1 w_1 + C_2 w_2, \\ z &= \beta y, \quad n = k/\beta, \quad m = 0 \quad \text{または} \quad 1, \\ l(l-1) &= g \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right) \frac{1}{\beta c^2}, \end{aligned}$$

つまり

$$l = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + g \frac{\Delta \rho}{\rho_0 \beta c^2}} \quad (14)$$

と置けばよい. 無限遠の条件 (6), (7) より $\xi = \cosh^2 \beta y \rightarrow \infty$ で Ψ_0 は有限の値をとらなくてはならないから $C_2 = 0$ である.

さらに $y=0$ で流れ関数は連続でなくてはならないが, そのためには, $\xi = \cosh^2 \beta y \rightarrow 1+$ で (13a) に現われた超幾何関数の, ある項から先がすべて 0 にならなくてはならない. その条件は $(l+m+n)/2$, $(m+n-l+1)/2$ のうちいずれかが 0 か負の整数になることである. (14) の条件中 m に 2 通りのとり方, l に正負の符号のとり方の任意性があるから, この $y=0$ での流れ関数の連続条件も多くの場合に分けられるのであるが, これら多数の場合のうち多くは重複しているので, 結局次のように書けば, すべての場合が尽くされてしまうことが分かる. すなわち

$$l = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + g \frac{\Delta \rho}{\rho_0 \beta c^2}}$$

であって

(A) $m=0$ の場合

$$\Psi_0 = C_1 \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y \cdot F \left(-p, (k/\beta) + p + \left(\frac{1}{2} \right); (k/\beta) + 1; \operatorname{sech}^2 \beta y \right). \quad (15)$$

ここで

$$p = -(l+n) = -\left\{ (1/2) - \sqrt{(1/4) + g \Delta \rho / (\rho_0 \beta c^2)} + (k/\beta) \right\}$$

であり, この p の値は正の整数か 0 である.

(B) $m=1$ の場合

$$\Psi_0 = C_1 \tanh \beta y \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y \cdot F(-p, (k/\beta) + p + (3/2); (k/\beta) + 1; \operatorname{sech}^2 \beta y). \quad (16)$$

ここで

$$p = -(l+m+n) = -\left\{ (3/2) - \sqrt{(1/4) + g \Delta \rho / (\rho_0 \beta c^2)} + (k/\beta) \right\}$$

であり, この p の値は正の整数か 0 である.

具体的に $p=0, 1, 2, \dots$ をこれらの式に代入して, 微分方程式 (9) の固有関数系の最初の数項を, その固有値とともに書くと, 次の各式が得られる. ただし任意定数は省略する.

$p=0$:

(A) より

$${}_1\Psi_0 = \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y, \quad (17)$$

$${}_1c_0^2 = \frac{g\Delta\rho}{\rho_0} \frac{\beta}{k(k+\beta)}; \quad (18)$$

(B) より

$${}_2\Psi_0 = \tanh \beta y \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y,$$

$${}_2c_0^2 = \frac{g\Delta\rho}{\rho_0} \frac{\beta}{(k+\beta)(k+2\beta)};$$

$p=1$:

(A) より

$${}_3\Psi_0 = \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y \cdot \left\{ 1 - \frac{(k/\beta) + (3/2)}{(k/\beta) + 1} \operatorname{sech}^2 \beta y \right\},$$

$${}_3c_0^2 = \frac{g\Delta\rho}{\rho_0} \frac{\beta}{(k+2\beta)(k+3\beta)};$$

(B) より

$${}_4\Psi_0 = \tanh \beta y \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y \cdot \left\{ 1 - \frac{(k/\beta) + (5/2)}{(k/\beta) + 1} \operatorname{sech}^2 \beta y \right\},$$

$${}_4c_0^2 = g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{\beta}{(k+3\beta)(k+4\beta)};$$

$p=2$:

(A) より

$$\begin{aligned} {}_5\Psi_0 = & \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y \cdot \left[1 - 2 \left\{ \frac{(k/\beta) + (5/2)}{(k/\beta) + 1} \right\} \operatorname{sech}^2 \beta y \right. \\ & \left. + \frac{\{(k/\beta) + (5/2)\} \{(k/\beta) + (7/2)\}}{\{(k/\beta) + 1\} \{(k/\beta) + 2\}} \operatorname{sech}^4 \beta y \right], \end{aligned}$$

$${}_5c_0^2 = g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{\beta}{(k+4\beta)(k+5\beta)};$$

(B) より

$$\begin{aligned} {}_6\Psi_0 = & \tanh \beta y \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y \cdot \left[1 - 2 \left\{ \frac{(k/\beta) + 7}{(k/\beta) + 1} \right\} \operatorname{sech}^2 \beta y \right. \\ & \left. + \frac{\{(k/\beta) + (7/2)\} \{(k/\beta) + (9/2)\}}{\{(k/\beta) + 1\} \{(k/\beta) + 2\}} \operatorname{sech}^4 \beta y \right], \end{aligned}$$

$${}_6c_0^2 = g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{\beta}{(k+5\beta)(k+6\beta)};$$

.....

左下に付けた添え字はモード番号を表わす。 ${}_1\Psi_0$ が基本モードであり、 ${}_1c_0$ がその固有値す

なわち波速を表わす. n 番目のモードの波速 nc_0 は

$$nc_0^2 = g \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \frac{\beta}{\{k + (n-1)\beta\}\{k + n\beta\}}$$

で表わすことができる. $\beta \rightarrow \infty$ の場合, つまり躍層の厚さが無限小の場合には, 基本モード以外の波速は 0 になる. つまり 2 層モデルでは内部波のモードは一つしか現われない. 現実の海で最も顕著に現われるのもまた多くの場合この基本モードの内部波であろうから, 次節以下の減衰の議論もまたこの基本モードの内部波に限ることにし, モード番号を表わす添え字も一々付けないことにする.

この基本モードの内部波の, 躍層の中心線の形が

$$y = iae^{i(kx - \sigma_0 t)}$$

であったとすれば, その場合の流れ関数は

$$\phi = \Psi_0(y) e^{i(kx - \sigma_0 t)} = ac_0 \operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y e^{i(kx - \sigma_0 t)} \quad (19)$$

となる. a はこの内部波の振幅に相当する.

4. 粘性による内部波の減衰

粘性に関する無次元微小量 ε を

$$\varepsilon = \frac{\nu k^2}{\sigma_0} \quad (20)$$

のように定義する. この量を用いて角振動数 σ と, 流れ関数 ϕ を

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots, \quad (21)$$

$$\phi = \{\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots\} e^{i(kx - \sigma t)} \quad (22)$$

のように展開する. ここで σ_1, Ψ_1 は粘性による 1 次近似項を表わし, これらの量は必ずしも実数とは限らない. 2 次近似項以下も同様である. σ_0, Ψ_0 は非粘性の内部波に対するもので, (17), (18) 及び $\sigma_0 = c_0 k$ によって与えられる.

1 次近似の範囲内で, (5)' を満たすように σ_1, Ψ_1 を求めるのであるが, いま流れ関数の 1 次近似までの解として

$$\begin{aligned} \phi &= (\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1) e^{i(kx - \sigma t)} + O(\varepsilon^2) \\ &= ac_0 (\operatorname{sech}^{k/\beta} \beta y + \varepsilon \gamma \operatorname{sech}^{(k/\beta)+2} \beta y) e^{i(kx - \sigma t)} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (23)$$

の形を仮定する. そうすれば

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= ac_0 e^{i(kx - \sigma t)} \{-k(k + \beta) + 4\varepsilon \gamma \beta(k + \beta) \\ &\quad - \varepsilon \gamma(k + 2\beta)(k + 3\beta) \operatorname{sech}^2 \beta y\} \operatorname{sech}^{(k/\beta)+2} \beta y + O(\varepsilon^2), \\ \nabla^2(\nabla^2 \phi) &= -ac_0 e^{i(kx - \sigma t)} k(k + \beta)\{4\beta(k + \beta) \\ &\quad - (k + 2\beta)(k + 3\beta) \operatorname{sech}^2 \beta y\} \operatorname{sech}^{(k/\beta)+2} \beta y + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

となる. これら及び (21) を (5)' に代入し $O(\varepsilon)$ の項をとれば, $\operatorname{sech}^{(k/\beta)+2} \beta y$ の係数から

$$\sigma_1 \sigma_1 k(k+\beta) - 2\sigma_0^2 \beta \gamma(k+\beta) = 2i\sigma_0^2 \frac{\beta(k+\beta)}{k}, \quad (24)$$

$\text{sech}^{(k/\beta)+4} \beta y$ の係数から

$$\sigma_0^2 \gamma(k+2\beta)(k+3\beta) - gk^2 \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \beta = -i\sigma^2 \frac{(k+\beta)(k+2\beta)(k+3\beta)}{k} \quad (25)$$

をそれぞれ得る. (25) によって未知数 γ が求められる. (18) 式によって g を消去すれば

$$\varepsilon \gamma = -i \frac{\nu k(k+\beta)(k+2\beta)(k+3\beta)}{2\sigma_0 \beta(2k+3\beta)}. \quad (26)$$

これを (24) 式に代入すれば

$$\varepsilon \sigma_1 = -i\nu \frac{k(k+\beta)^2}{(2k+3\beta)}. \quad (27)$$

波の振幅が元の大きさの e^{-1} になるまでの時間を減衰時間 (decay time) と呼び ϑ_a で表わすと

$$\vartheta_a = \frac{1}{|\text{Im}(\varepsilon \sigma_1)|} = \frac{2k+3\beta}{\nu k(k+\beta)^2} \quad (28)$$

となる. これから分かるように, 減衰時間は動粘性係数に反比例し, 密度差には無関係である. (28) で $\beta \rightarrow \infty$ とすれば ϑ_a は 0 に収束する. このことは水温躍層の厚さが薄くなれば

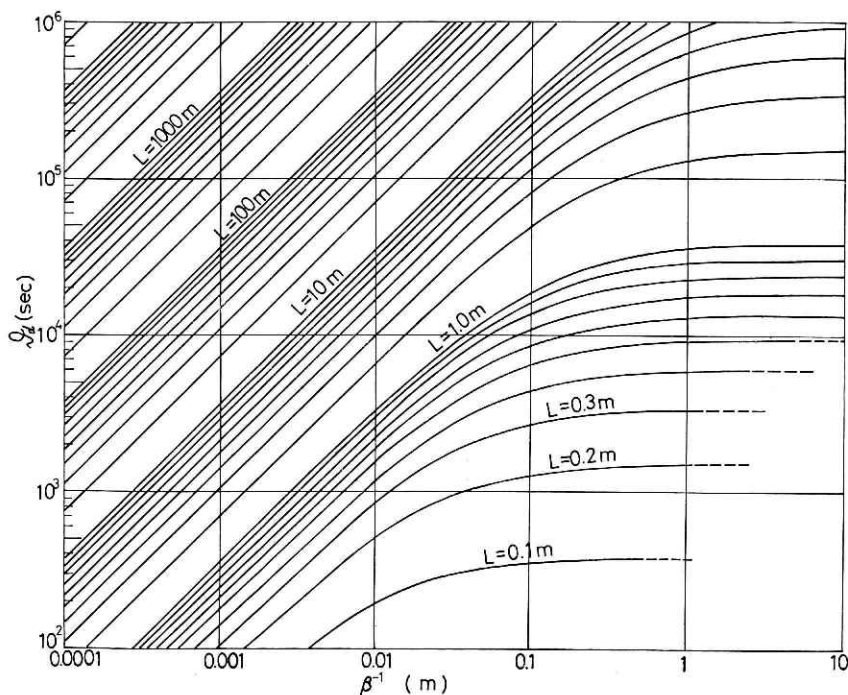


図 7 内部波の減衰時間. 横軸には β^{-1} (m) をとってある. この数値の 4 倍がほぼ密度変化層の厚さを表す. 動粘性係数は分子粘性の値 $\nu = 1.3 \times 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ を使っている. うず粘性係数がこの 100 倍の値をとるならば, 減衰時間はこの図から読み取られる値の 100 分の 1 になる.

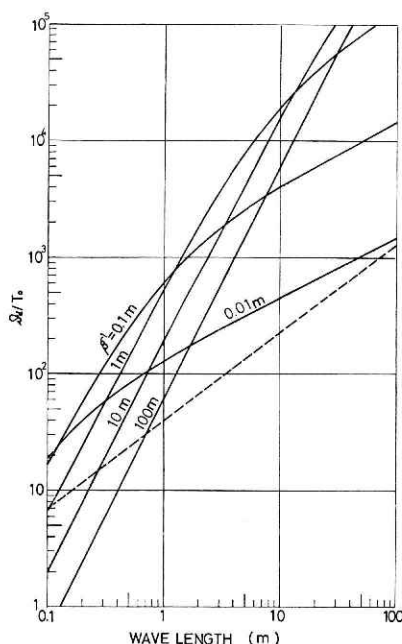


図 8 $\Delta\rho/\rho_0=0.001$ としたときの減衰時間。実線は (29) 式による値、点線は密度不連続の 2 層モデルによる (31) 式による値である。

となる。図 8 はこの関係を $\Delta\rho/\rho_0=10^{-3}$ の場合について図示したものである。 ν の値については図 7 と同様である。

比較のため Johns and Cross (1969) のように、躍層の厚さを無限に小さいと考えたモデルから導かれる減衰時間の式を書く

$$g_a = 3 \cdot 2^{3/4} \nu^{-1/2} k^{-5/4} g^{-1/4} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \right)^{-1/4}, \quad (30)$$

$$g_a/T_0 = 3\pi^{-1} \cdot 2^{-3/4} \nu^{-1/2} k^{-3/4} g^{1/4} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \right)^{1/4} \quad (31)$$

(誘導方法については付録参照)。ここで $\Delta\rho$ は上層と下層の密度差である。図 8 の破線は (31) 式の関係を示したものである。(30), (31) を見て分かるように、減衰時間は動粘性係数の平方根に反比例している。一般には、(30), (31) で計算した減衰時間の方が、(28), (29) で計算したそれより短くなることが多い。これは序論のところで述べた理由によって、水温躍層全体が振動するようなスケールの内部波に対しては、Johns and Cross の仮定した、水温躍層の厚さを無視したモデルによって計算すれば、内部波エネルギーの損失が見積もり過剰になるという、そのことの当然の結果である。ここで導いた内部波減衰の公式 (28), (29) は、Woods が観測したような、躍層中の微細な密度境界面を伝わる、スケールのより小さな内部波などに対しても、適用できると考えられる。ただその際、式中の動粘性係数の値に

なるほど内部波の寿命が短くなることを示しており、躍層の厚さが内部波の減衰の支配的な要因であることが分かる。図 7 は (28) 式の関係を図示したものである。動粘性係数 ν の値は、分子粘性係数としての値 $\nu=1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ を用いてある。躍層全体が振動している図 3 に示したような内部波の減衰を論ずるときには、乱流のうず粘性係数を用いる方が妥当である。ただろ粘性係数の値は正確な数値を与えることが難しい。一つの目安として分子動粘性係数の 100 倍の値をとるとすれば、内部波の減衰時間は、図 7 で読み取った値の 100 分の 1 になる。

次に何周期伝搬すれば振幅が e^{-1} になるかを計算する。内部波の周期を T_0 (秒) とすれば

$$\begin{aligned} g_a/T_0 &= \frac{\sigma_0}{2\pi|\text{Im}(\epsilon\sigma_1)|} \\ &= \frac{g^{1/2}\beta^{1/2}(2k+3\beta)}{2\pi\nu(k+\beta)^{5/2}k^{1/2}} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (29)$$

ついては、扱う現象のスケールによって考慮されねばならない。

5. 観測データのあてはめ

STD の観測で得られた図 2 の密度分布のデータを (1) に当てはめると、ほぼ $\rho_0=1.02406$, $\Delta\rho=4.0\times 10^{-4}$, $\beta^{-1}=1.5\text{ m}$ となる。原点はこの場合水深 63 m のところにある。図 3 の水温変化記録から、ここに現われた内部波のおよその周期は

$$T_0=400\text{ s}, \quad \sigma_0=2\pi/400=1.57\times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$$

とみると、(18) と $c_0=\sigma_0/k$ の関係から波数 k が求まり、

$$k=\frac{\rho_0\beta\sigma_0^2}{g\Delta\rho\beta-\sigma_0^2\rho_0}=7.14\times 10^{-2}\text{ m}^{-1}$$

となり、波長 L は

$$L=\frac{2\pi}{k}=88.1\text{ m} \quad (32)$$

となる。これらの値を (28), (29) に代入すれば

$$g_a=4.21\times 10^5\text{ s}=117\text{ h},$$

$$g_a/T_0=1.052\times 10^3.$$

ここでは、動粘性係数として、分子粘性係数の 100 倍の値すなわち $\nu=1.3\times 10^{-4}\text{ m}^2\text{s}^{-1}$ を用いることにした。

波の振幅が元の大きさの e^{-1} になるまでの伝搬距離は、 c_g を群速度とすれば、(18) より

$$c_g=\frac{d\sigma_0}{dk}=\frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta+k}c_0=0.110\text{ m/s}$$

となるから

$$g_a\times c_g=46.3\text{ km}$$

となる。

以上のような数値から、躍層全体が振動しているような内部波は、寿命はおよそ 1 週間程度、その間の伝搬距離は、50 km 程度であると推定され、その発生原因もまた、時間的にも空間的にも、この範囲内に求めるべきであると結論される。

6. む す び

躍層の上端から海面までの距離、すなわち密度、水温、塩分ともほぼ均一な表層混合層の厚さを、ここでは無限大として理論を組み立てたが、これはどの程度正当であろうか。(32) にも計算されたように、躍層を伝わる周期 10 分ぐらいまでの内部波ならば、その波長は 100 m 程度と考えられる。表層混合層の厚さはその半分より厚いわけである。内部波の影響は (17) (Lamb (1932) の Art. 373 も参照) から分かるように e^{-ky} (y は躍層からの距離)

にほぼ比例して小さくなるから、波長が表層混合層の厚さの2倍のときには、 $e^{-2\pi \times D/L} = e^{-\pi} \approx 1/23$ となり、内部波の運動の影響は表面にはほとんど及ばないことが分かる。波長が表層混合層の厚さの数倍ないし十数倍あるときにも、(28), (29) はおおよその減衰時間を見積もるのには有効であろう。内部波の特性が、表層混合層が相対的に薄いことによって、厚さが無限大と仮定したときとかなり異なっているにしろ、エネルギーの損失はほとんど躍層の中だけで起こっているとみなせるからである。また元来うず粘性係数という正確には定め難い因子を含んでいるからでもある。

内部波については、理論的にはかなりの数の研究者により取り扱われているし、その存在を証明する、断片的な観測事実もかなりの例が報告されている。しかしその割に、内部波の“存在を証明する”段階から1歩進んで“その実態をつかむ”ための系統的な観測例はさほど多くない。これは普通の表面波と違って、(1) 目に見えないこと、(2) 現象が3次元的で、測定機具が多く要ること、(3) 表面波より長い時間スケールの現象であること、(4) 得られた水温、塩分、流速などの原データから定常流や乱れの影響を差し引いて、純粋に内部波成分だけを分離することが困難であること、などの理由が挙げられる。内部波についても、表面波と同じように、方向性、パワーが論じられて、その発生原因が突き止められるようになるまでには、まだ当分多くのデータの集積を待たなければならない。ここで導いた減衰を算出する公式の中に現われる動粘性係数の値をどの程度にとるかということもまた、室内実験ないし現地観測によって得られた、乱流に関する知識の集積を待たなければならないだろう。

7. 謝 辞

この論文の作成に当たり、日々暖かい激励を賜わっている国立防災科学技術センター平塚支所沿岸防災第1研究室岩田憲幸室長^{*}、藤繩幸雄氏[†]、沿岸防災第2研究室内藤玄一氏、当支所の電子計算機の使用に際して御指導してくださった渡部勲氏に対し、感謝の意を表します。

付録：2層構造の境界面を伝わる内部波の減衰

Johns and Cross (1969) は、密度が鉛直方向に階段状に不連続に変化するような、多層構造の海を伝わる内部波について、その減衰を論じている。しかし、その論文の中には、われわれに使いやすい公式の形では、減衰時間算出方法が明記されていないので、ここで改めて、その一番単純な場合、つまり2層構造の境界面を伝わる内部波について、その粗筋をたどることとする。

^{*} 現在：国立防災科学技術センター平塚支所長

[†] 現在：平塚支所沿岸防災第1研究室長

Johns and Cross の原論文では、動粘性係数が各層で異なってもよく、またブシネスク (Boussinesq) 近似も成立していなくてもよいという、一般的な場合が述べてあるが、ここでは粘性係数は、上下層を通じ一定値をとるとし、ブシネスク近似が成立している範囲内で考えることにする。上の層に関する量には添え字 U を、下の層の量には L をそれぞれ付けることにし、これらの添え字の付いていない量は、上層、下層それぞれについて、その量の出てくる式が成り立っていることを表わすものとする。上下各層の厚さは無限大とし、密度境界面の平均位置に原点を置き、水平方向に x 軸、鉛直上方に y 軸をとる。

各層内では、密度が一定だから、(5) 式に対応して流れ関数 ψ について

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \psi = \nu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \quad (A1)$$

が成り立つ

境界面での条件は四つ出てくる。

(A) 境界面での水平方向の力 (せん断応力) のつりあいから

$$\left[\frac{\partial^2 \psi_U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_U}{\partial y^2} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial y^2} \right]_{y=0} \quad (A2)$$

(B) 同じく鉛直方向の力のつりあいから

$$\left[\left\{ \nu \left(3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} (\psi_L - \psi_U) + \frac{\Delta \rho g}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x^2} \right]_{y=0} = 0 \quad (A3)$$

ここで $\Delta \rho$ は上下層の密度の差を表わし、また ρ はブシネスク近似の範囲内で、上下いずれの層の密度の値を用いてもよい。

(C) 粘性流体として取り扱っているのだから、境界面をはさむ上下両層の水は、互いに滑ること (slip) が許されない。その条件から

$$\left[\frac{\partial \psi_U}{\partial y} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial \psi_L}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad (A4)$$

(D) 境界面の波形を $y = \eta(x, t) = a e^{i(kx - \sigma t)}$ と置くと、水はこの面に沿って運動しなくてはならないから (運動学的境界条件)

$$\left[\frac{\partial \psi_U}{\partial x} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial \psi_L}{\partial x} \right]_{y=0} = - \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{y=0} = i a \sigma e^{i(kx - \sigma t)} \quad (A5)$$

以上の四つの境界条件のうち、粘性を無視したときには、(A2), (A4) 式および (A3) 式のうち動粘性係数 ν の掛かった項が省略される。

無限遠での条件は2種類あって四つの条件式が出てくる。

(A) 上下の無限遠で流体は静止しているという条件から

$$\left[\frac{\partial \psi_U}{\partial x} \right]_{y=\infty} = \left[\frac{\partial \psi_U}{\partial y} \right]_{y=\infty} = 0 \quad (A6)$$

$$\left[\frac{\partial \psi_L}{\partial x} \right]_{y=-\infty} = \left[\frac{\partial \psi_L}{\partial y} \right]_{y=-\infty} = 0 \quad (A7)$$

(B) 非線形項の影響を無視し、定常的な流れがないと仮定すると、上方無限遠から境界面までと、境界面から下方無限遠までの間に質量輸送がないという条件が付け加わり

$$[\bar{\phi}_v]_{y=\infty} = [\bar{\phi}_v]_{y=0}, \quad (\text{A8})$$

$$[\bar{\phi}_L]_{y=-\infty} = [\bar{\phi}_L]_{y=0}. \quad (\text{A9})$$

ここで流れ関数の上に付けたバーは時間平均を表わす。

1) 非粘性解

このモデルで考える場合も、第0近似としては、非粘性の場合の内部波の解を求めておく。Lamb (1932) の Art. 231 を参照すると、(A1), (A3), (A5), (A6), (A7), (A8), (A9) で $\nu=0$ とおいた各式を満たす解は

$$\phi_{0v} = c_0 a e^{-ky} e^{i(kx - \sigma_0 t)}, \quad (\text{A10})$$

$$\phi_{0L} = c_0 a e^{ky} e^{i(kx - \sigma_0 t)}, \quad (\text{A11})$$

$$\sigma_0^2 = \frac{D\rho}{2\rho} gk \quad (\text{A12})$$

で与えられる。この解は完全流体の解であるから、境界面におけるせん断応力連続条件 (A2) は考慮されていないし、そこでの滑べりのない (non-slip) 条件 (A4) も満たされていない。

2) 粘性解

粘性の影響を考慮した第1近似解を求めるため、

$$\epsilon^2 = \frac{2\nu k^2}{\sigma_0} \quad (\text{A13})$$

のような微小パラメーターを考える。エネルギーの損失は主として境界面のごく近くで生ずるシヤーによるものである。そこで $y=0$ の近傍を表わす座標系として

$$y = \epsilon Y$$

なる Y 座標を導入する。流れ関数 ϕ 、角振動数 σ 、うず度 $\xi (= \nabla^2 \phi)$ に対し、

$$\phi = \{c_0 a e^{\pm i k Y} + \epsilon P e^{\pm i k Y} + \epsilon \Psi_1(Y) + \epsilon^2 \Psi_2(Y) + \dots\} e^{i(kx - \sigma t)}, \quad (\text{A14})$$

$$\sigma = \sigma_0 + \epsilon \sigma_1 + \epsilon^2 \sigma_2 + \dots,$$

$$\xi = \nabla^2 \phi = \frac{1}{\epsilon} (f_1 + \epsilon f_2 + \epsilon^2 f_3 + \dots) e^{i(kx - \sigma t)} \quad (\text{A15})$$

のような展開形を仮定する。

複号は下層に対してはプラスを、上層に対してはマイナスをとる。数字 1, 2, ... の添え字は近似のオーダーを表わし、以下たとえば $\phi_{v,2}$ というのは流れ関数の上層に対する第2近似項を表わすことにする。

(A14) を (A15) に代入し $O(\epsilon)$, $O(\epsilon^2)$ の項を拾い出せば

$$f_i = \frac{d^2 \Psi_i}{dY^2} \quad (i=1, 2) \quad (\text{A16})$$

が得られる。(A1) をうず度を用いて表わせば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = \nu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \xi .$$

これに (A15) を代入すれば

$$-i\sigma_0 \frac{1}{\epsilon} (f_1 + \epsilon f_2 + \dots) = \frac{\epsilon^2 \sigma_0}{2k^2} \left(-k^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{d^2}{dY^2} \right) \cdot \frac{1}{\epsilon} (f_1 + \epsilon f_2 + \dots) .$$

この式の $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ の項をとれば

$$\frac{d^2 f_1}{dY^2} + 2ik^2 f_1 = 0 , \quad (\text{A17})$$

同じく $O(1)$ をとれば

$$\frac{d^2 f_2}{dY^2} + 2ik^2 f_2 = -2i \frac{\sigma_1}{\sigma_0} k^2 f_1 \quad (\text{A18})$$

をそれぞれ得る。常微分方程式 (A17) の解のうち、無限遠の条件 (A6), (A7) を満たす項だけを残せば

$$f_{U,1} = C'_U e^{-(1-i)kY} , \quad (\text{A19a})$$

$$f_{L,1} = C'_L e^{(1-i)kY} \quad (\text{A19b})$$

となる。(A2) の条件よりここに現われた積分定数 C'_U と C'_L は相等しく、この等しい値を $-2ik^2 C$ とおく。(A19a), (A19b) を 2 度積分すると、(A16) によって流れ関数となる。この積分の際、現われる積分定数は、無限遠条件 (A6), (A7), (A8), (A9) によりすべて 0 になる。

$$\psi_{U,1} = C e^{-(1-i)kY} , \quad (\text{A20a})$$

$$\psi_{L,1} = C e^{(1-i)kY} . \quad (\text{A20b})$$

この C の値は、(A4) の条件の $O(\epsilon)$ の項を拾い出すことにより求まり

$$c_0 a + (1-i)C = 0 ,$$

$$\therefore C = -\frac{1+i}{2} c_0 a , \quad (\text{A21})$$

$$C'_U = C'_L = -(1-i)k^2 c_0 a \quad (\text{A22})$$

となる。また (A5) ~ (A14) を代入し、 $O(\epsilon)$ の項を拾い出せば

$$P_U + C = P_L + C = \frac{\sigma_1}{k} a . \quad (\text{A23})$$

(A21) により C は知られているから

$$P_U = P_L = a c_0 \left(\frac{1+i}{2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) . \quad (\text{A24})$$

以上によって流れ関数の 1 次近似の項はすべて未知数 σ_1 で書き表わされることになった。この σ_1 は未知であるが、そのまま 2 次近似の関係式を調べてゆくことにする。(A18) の右辺はすでに (A19a), (A19b), (A22) により求まっている。それによってこの微分方程式を

解き、無限遠で発散する項を落とせば

$$f_{U,2} = \frac{d^2 \Psi_{U,2}}{dY^2} = e^{-(1-i)kY} (D_U - ik^2 a \sigma_1 Y),$$

$$f_{L,2} = \frac{d^2 \Psi_{L,2}}{dY^2} = e^{(1-i)kY} (D_L + ik^2 a \sigma_1 Y).$$

積分定数 D_U, D_L はやはり (A2) により等しくなり、これを D と書くことにする。これらを 1 回 Y で積分する。積分定数は無限遠条件 (A6), (A7) より 0 になって

$$-\frac{d\Psi_{U,2}}{dY} = e^{-(1-i)kY} \left(-\frac{1+i}{2k} D - \frac{1-i}{2} a \sigma_1 k Y - \frac{a \sigma_1}{2} \right), \quad (A25a)$$

$$\frac{d\Psi_{L,2}}{dY} = e^{(1-i)kY} \left(\frac{1+i}{2k} D - \frac{1-i}{2} a \sigma_1 k Y + \frac{a \sigma_1}{2} \right). \quad (A25b)$$

(A5) の $O(\epsilon^2)$ の項から D が定まり、上の二つの式に代入すれば

$$\frac{d\Psi_{U,2}}{dY} = e^{-(1-i)kY} \left\{ a \sigma_0 \left(\frac{1+i}{2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) - \frac{1-i}{2} k a \sigma_1 Y \right\}, \quad (A26a)$$

$$\frac{d\Psi_{L,2}}{dY} = e^{(1-i)kY} \left\{ a \sigma_0 \left(\frac{1+i}{2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) - \frac{1-i}{2} k a \sigma_1 Y \right\}. \quad (A26b)$$

以上により求めた流れ関数の値を (A3) に代入すれば、 σ_1 が求まり

$$\sigma_1 = -\frac{1+i}{6} \sigma_0 \quad (A27)$$

となる。 $\epsilon \sigma_1$ の虚部の絶対値の逆数が減衰時間 ϑ_a になる。

$$\vartheta_a = \frac{1}{|\operatorname{Im}(\epsilon \sigma_1)|} = \frac{6}{\epsilon \sigma_0}.$$

(A12), (A13) を代入すれば

$$\vartheta_a = 3 \cdot 2^{3/4} \nu^{-1/2} k^{-5/4} g^{-1/4} (\Delta \rho / \rho)^{-1/4}, \quad (A28)$$

$$\vartheta_a / T_0 = 3 \pi^{-1} \cdot 2^{-3/4} \nu^{-1/2} k^{-3/4} g^{1/4} (\Delta \rho / \rho)^{1/4} \quad (A29)$$

をそれぞれ得る。

以上たどってきた論証で明らかなように、この Johns and Cross のモデルでは、密度境界面のごく近くの、大きなシャーの発生する薄い層の中でのエネルギーの損失を見積もっているから、これらの式が適用できるのは、密度変化層（われわれの場合には躍層）の厚さが、このシャー発生層の厚さスケール $\sqrt{2\nu/\sigma_0}$ に比べて、非常に薄い場合のみである。5 節で述べた内部波の実例で、このスケールを計算すると、 $\nu = 1.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ （分子粘性の 100 倍）として、 $\sqrt{2\nu/\sigma_0} = 12.9 \text{ cm}$ となるから、公式 (A28), (A29) または (30), (31) は躍層全体が振動するような内部波の減衰の計算には全く適用できないことが判明する。

参 考 文 献

- 1) Cox, C. S., Y. Nagata and T. R. Osborn (1969): Oceanic fine structure and internal waves. *Bull. Jap. Soc. Fish. Oceanogr.*, Special Number, 67—72.

- 2) Johns, B. and M. J. Cross (1969): The decay of internal wave modes in a multi-layered system. *Deep Sea Res.*, **16**, 185—195.
- 3) Lamb, H. (1932): *Hydrodynamics*, 6th ed. Camb. Univ. Press.
- 4) 永田 豊, 中井俊介, 前田明夫, 渡辺正昭, 徳田正幸, 佐伯理郎, 市川 洋, 小田巻 実, 都司嘉宣 (1973): 沖縄付近の黒潮の構造——AMTEX 予備観測 (KH-73-3) から——, 昭和 48 年度日本海洋学会秋季大会講演要旨集, 日本海洋学会, p. 120.
- 5) Osborn, T. R. (1969): Oceanic fine structure. UCSD Dissertation.
- 6) Woods, J. D. (1968): Wave-induced shear instability in the summer thermocline. *J. Fluid Mech.*, **32**, Part 4, 791—800.
- 7) Woods, J. D. (1969): On Richardson's number as a criterion for laminar-turbulent-laminar transition in the ocean and atmosphere. *Radio Sci.*, **4** (12), 1289—1298.

(1974 年 4 月 1 日原稿受理)