波浪のスペクトル幅と統計量(?)

著者	岩田 憲幸, 稲田 亘, 渡部 勲
雑誌名	国立防災科学技術センター 研究報告
巻	5
ページ	81-87
発行年	1971-03
URL	http://doi.org/10.24732/nied.00000686

国立防災科学技術センター研究報告　第5号　1971年3月

551.466:551.556.8(265.5)

波浪のスペクトル幅と統計量 (II)

岩田憲幸・稲田　亘・渡部　勲
国立防災科学技術センター平塚支所

Ocean Wave Statistics and Spectrum Width Parameter (II)

By

N. Iwata, W. Inada and I. Watabe

Hiratsuka Branch, National Research Center for Disaster Prevention

Abstract

From numerous observations of surface waves carried out with capacitance-type wave gauges, several statistical quantities such as variance, wave heights and wave periods are calculated.

The spectrum width parameter introduced by Cartwright and Longuet-Higgins (1956) is obtained on the one hand from the ratio of crest-to-crest period to zero-up crossing period, and on the other from the ratio between the numbers of positive and negative maxima. The $1/n$-largest maxima and the corresponding wave heights are plotted against this parameter.

It is concluded that wave heights are considerably smaller than twice the corresponding maxima, and that the ratio of significant wave height to mean wave height and the ratio of 1/10-largest wave height to significant wave height remarkably deviate from the values fixed for Rayleigh distribution.

1. はじめに

波浪の統計量のなかで平均値を零としたときの極大値の分布は Cartwright ら (1956) が Rice (1954) の雑音解析の手法を用いた表現式を提案して以来ほぼ確立したかのようにみえる．しかし，実際に海の波を考察する場合，直観的にわかりやすいのは，極大値の平均値からのずれでなく相続く極大と極小の差，すなわち波の山と谷との差，波高に関する統計量である．

この波高分布についてはその分布則がどのようなものであるか現在では不明である．岩田ら (1970) は前報で平均波高は極大値の平均の2倍に近似的に等しく，したがって，その大きさは極大値の分布を支配するスペクトル幅を示すパラメーター ϵ によって変化することを示した．

ここでは，更に計算を進めて，有義波高，1/10 最大波高と対応する極大値との関係を調べる．

いま，水面変動を平均値を零にとって

$$\zeta=\sum_{1}^{n} a_n \cos(\sigma_n t-\theta_n)$$

とする．σ_n は角周波数で $(0,\ \infty)$ の間の任意の値をとりうる．位相 θ_n は $(0,\ 2\pi)$ の間に一様に分布しているとする．また，$\xi_1=\zeta(t)$，$\xi_2=\dot{\zeta}(t)$，$\xi_3=\ddot{\zeta}(t)$ とする．更に，ξ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ がそれぞれ ξ_i と $\xi_i+\mathrm{d}\xi_i$ の間にある結合確率を $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$ としるす．もし，ξ_1 が t と $t+\mathrm{d}t$ の間で極大をとるとすれば，ξ_2 は $\mathrm{d}t$ 時間内に $\mathrm{d}\xi_2=|\ddot{\zeta}|\mathrm{d}t$ だけ変化する．したがって，ξ_1 が ξ_1 と $\xi_1+\mathrm{d}\xi_1$ の間にあって t と $t+\mathrm{d}t$ の間で極大となる確率は

$$\int_{-\infty}^{0}[p(\xi_1,\ 0,\ \xi_3)\mathrm{d}\xi_1\,|\xi_3|\,\mathrm{d}t]\mathrm{d}\xi_3$$

で与えられる．したがって，単位時間内に ζ が ζ と $\zeta+\mathrm{d}\zeta$ の間で極大となる確率は

$$F(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1=\int_{-\infty}^{0} p(\xi_1,\ 0,\ \xi_3)|\xi_3|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_3 \qquad (1)$$

である．さて，ξ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ は平均値が零で位相が不規則な振動の集合であるから中心極限定理によって $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ は3次元の正規分布になる．したがって，この場合は

$$p(\xi_1,\ 0,\ \xi_3)=(2\pi)^{-3/2}|M|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2|M|}(M_{11}\xi_1^2+2M_{13}\xi_1\xi_3+M_{33}\xi_3^2)\right] \qquad (2)$$

である．ただし．行列 M は

$$M=\begin{pmatrix} \overline{\xi_1^2} & 0 & -\overline{\xi_2^2} \\ 0 & \overline{\xi_2^2} & 0 \\ -\overline{\xi_2^2} & 0 & \overline{\xi_3^2} \end{pmatrix}$$

であるから

$$|M|=\overline{\xi_2^2}[\overline{\xi_1^2}\,\overline{\xi_3^2}-(\overline{\xi_2^2})^2],$$

$$M_{11}=\overline{\xi_2^2}\,\overline{\xi_3^2},\quad M_{13}=(\overline{\xi_2^2})^2,\quad M_{33}=\overline{\xi_1^2}\,\overline{\xi_2^2}$$

となる．ここで

$$\overline{\xi_1\xi_2}=\overline{\xi_2\xi_3}=0,\quad \overline{\xi_1\xi_3}=-\overline{\xi_2^2}$$

であることに注意しなければならない．(2) を (1) に代入し ξ_3 について積分する．更に

$$\eta=\frac{\xi_1}{\sqrt{\overline{\xi_1^2}}}$$

として水面変動の分散の平方根（標準偏差）で無次元化した水位を η とすると，極大値の確率分布として

$$p(\eta)=\frac{F(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1}{\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\epsilon\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\epsilon}\right)+(1-\epsilon^2)^{1/2}\eta\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\eta\sqrt{1-\epsilon^2}/\epsilon}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right] \qquad (3)$$

となって Cartwright らの式が得られる．ただし

$$\epsilon=\frac{|M|}{M_{11}M_{33}}=1-\frac{(\overline{\xi_2{}^2})^2}{\overline{\xi_1{}^2}\overline{\xi_3{}^2}}$$

である．すなわち (3) は ξ_i $(i=1, 2, 3)$ が正規分布をするような確率変数ならばどのような場合にも成立する．パワースペクトルの形とは無関係である．

2. 極大値の分布と波高分布

スペクトルのモーメントは定義によって

$$m_n=\int_0^\infty S(f)f^n\mathrm{d}f$$

で与えられる．このときゼロアップクロスの平均周期 T_0 と波の山から次の山までの平均周期 T_p は

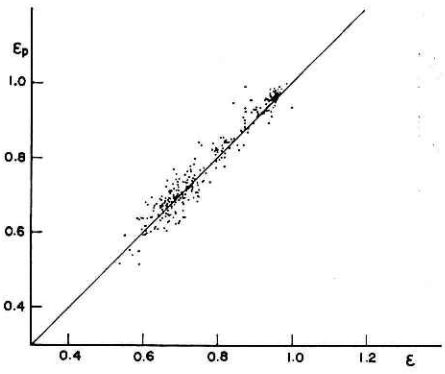


図 1 周期および極大値の数から求めたスペクトル幅パラメーターの比較

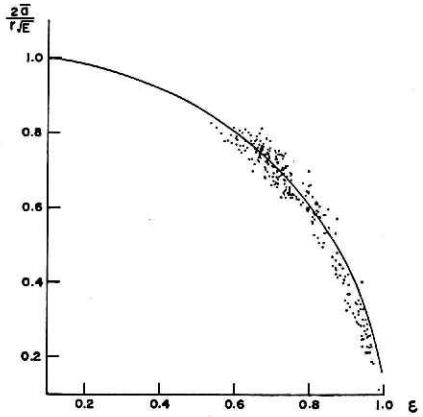


図 2a 平均極大値のスペクトル幅パラメーターによる変化

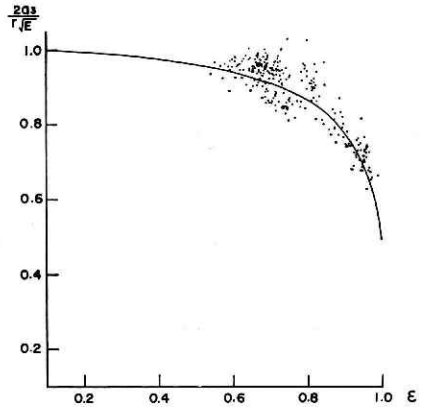


図 2b 極大値の 1/3 最大平均値のスペクトル幅パラメーターによる変化

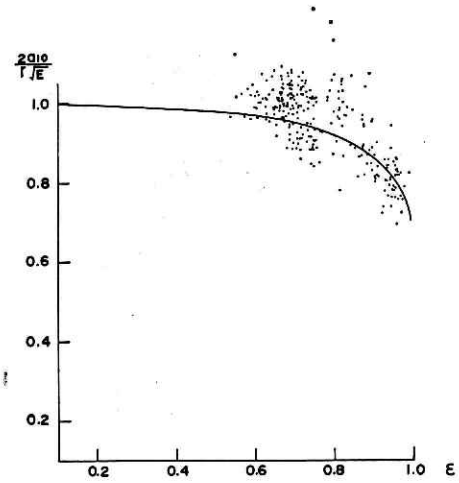


図 2c 極大値の 1/10 最大平均値のスペクトル幅パラメーターによる変化

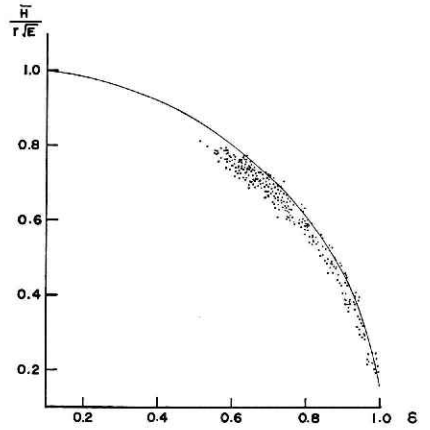


図 3a　平均波高のスペクトル幅パラメーターによる変化

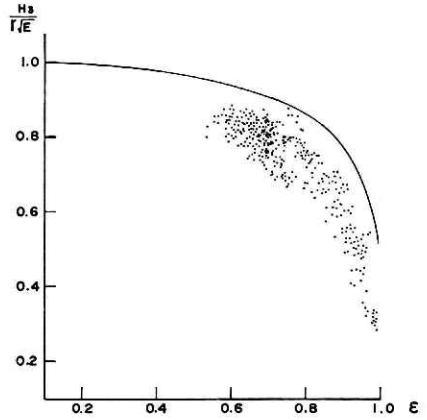


図 3b　有義波高のスペクトル幅パラメーターによる変化

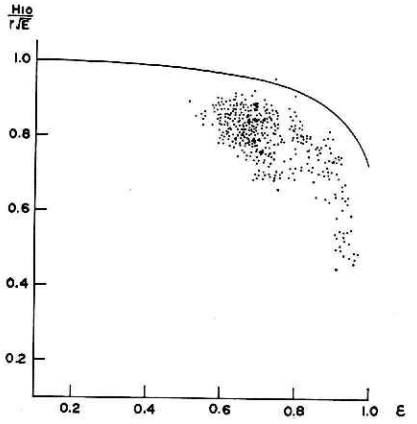


図 3c　1/10 最大波高のスペクトル幅パラメーターによる変化

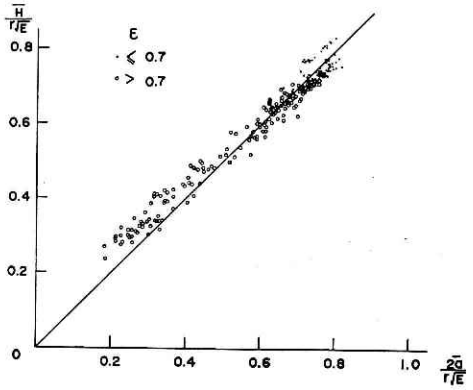


図 4a　平均波高と平均極大値との関係

$$T_0^2=\frac{m_0}{m_2},\quad T_p^2=\frac{m_2}{m_4}$$

となるから

$$\epsilon^2=1-\left(\frac{T_p}{T_0}\right)^2 \tag{4}$$

となる．一方，極大値全体の数と負の極大値の数との比を r とすれば Cartwright らによって

$$\epsilon^2=1-(1-2r)^2 \tag{5}$$

である．図1は (4), (5) 両式によって求めた ϵ の比較を示す．ϵ が小さいのは風浪で，ϵ が1に近いのはうねりの上にさざなみが乗っているときの観測である．どちらの方法で求めても大差はない．使用した波浪計は容量型で読取時間間隔は 0.3～0.6 秒であった．短周期の波まで計測している関係上 $\epsilon\geq 0.6$ である．

観測されたすべての極大値の中で大きい方から数えて全体の $1/n$ の極大値の平均は

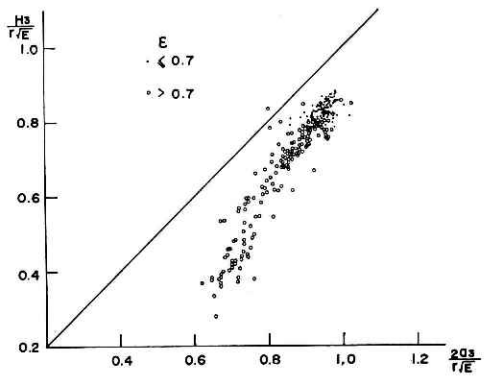


図 4b 有義波高と 1/3 最大極大値との関係

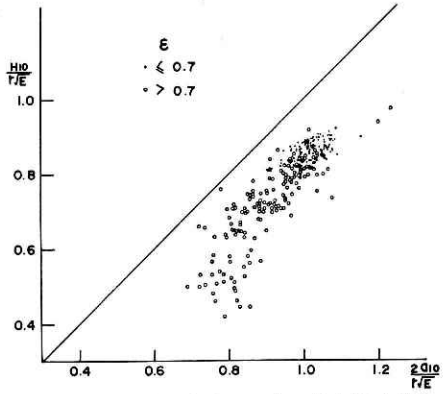


図 4c 1/10 最大波高と 1/10 最大極大値との関係

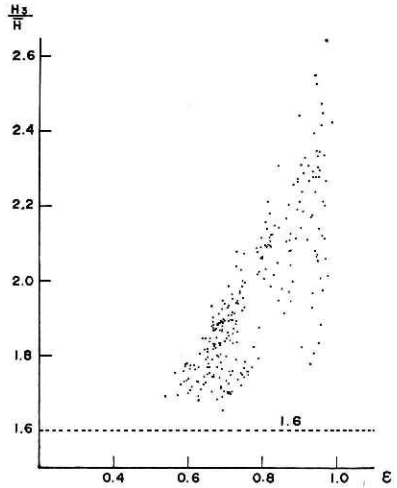


図 5a 有義波高と平均波高の比

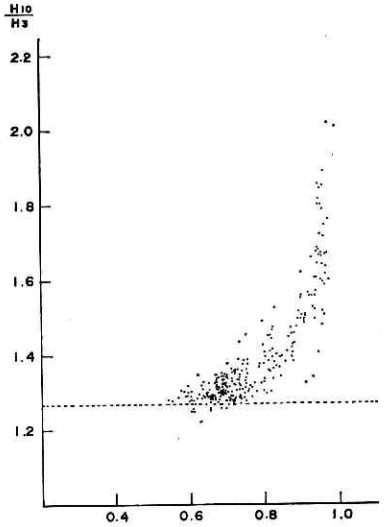


図 5b 1/10 最大波高と有義波高との比

$$\eta^{(1/n)}=\frac{\int_{\eta'}^{\infty}p(\eta)\eta\mathrm{d}\eta}{\int_{\eta'}^{\infty}p(\eta)\mathrm{d}\eta}. \tag{6}$$

ただし，η' は

$$\frac{1}{n}=\int_{\eta'}^{\infty}p(\eta)\mathrm{d}\eta$$

で与えられ，極大値の累積確率がちょうど，$1/n$ になるような η を示す．(3)式によって

$$\int_{\eta}^{\infty}p(\eta)\mathrm{d}\eta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\eta/\epsilon}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x+(1-\epsilon^2)\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\eta\sqrt{1-\epsilon^2}/\epsilon}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right],$$

$$\int_{\eta}^{\infty}p(\eta)\eta\mathrm{d}\eta=\frac{\epsilon^3}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\epsilon^2}\right)+\sqrt{1-\epsilon^2}\left[\eta\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)+\sqrt{2}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{\infty}\eta^2\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\mathrm{Erfc}\left(\frac{\eta\sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{2}\epsilon}\right)\mathrm{d}\eta\Bigg].$$

ただし，

$$\mathrm{Erfc}\,(x)=\int_{x}^{\infty}\exp\,(-t^2)\mathrm{d}t$$

となる．$n=1$ の平均値の場合は $\eta'\to-\infty$ となって

$$\bar{\eta}=\sqrt{\frac{\pi}{2}(1-\epsilon^2)}$$

と簡単に求まるが，$n=3$ あるいは 10 の場合は数値積分しなければならない．特別な場合として，$\epsilon=0$ となるレイリー分布の場合は

$$\overline{\eta_0}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ,\quad \eta_0^{(1/3)}\fallingdotseq 2\ ,\quad \eta_0^{(1/10)}=1.8\sqrt{2}\ .$$

したがって，水面変動の極大値の $1/n$ 最大値の平均を a_n で示し，波の全パワーを $E(=2m_0)$ とすれば

$$\frac{\eta^{(1/n)}}{\eta_0^{(1/n)}}=\frac{2a_n}{r\sqrt{E}}\quad(n=1,\ r=\sqrt{\pi};\ n=3,\ r=2\sqrt{2};\ n=10,\ r=3.60)$$

という量は ϵ に関して (0, 1) の間で変化する．図2は観測値と計算値との比較である．1回の観測の波の数は 300～500 であるから n が大きいほど平均する波の数が少なく，したがって，観測値のバラツキが大きくなる．

図3は極大値の代りに $1/n$ 最大波高の ϵ による変化を求めたものである．特徴的なことは，平均波高の変化が，平均極大値の変化とほぼ同じであるが，$n=3$, 10 の場合には波高の方が極大値の2倍よりはるかに小さいことである．この関係を更にくわしく見るために図4に波高と極大値の比較を示した．ϵ が大きい場合は波高は極大値の2倍よりはるかに小さくなるが，$\epsilon\sim0.7$ では近似的に

$$\frac{\bar{H}}{2\bar{a}}\fallingdotseq 0.95\ ,\quad \frac{H_{1/3}}{2a_{1/3}}\fallingdotseq 0.90\ ,\quad \frac{H_{1/10}}{2a_{1/10}}\fallingdotseq 0.85$$

の程度である．

図5には $H_{1/3}/\bar{H}$ と $H_{1/10}/H_{1/3}$ の比を示す．観測値のバラツキが大きいことを考えると，この比は ϵ 以外に何か他のパラメーターによって規定されると思われる．ϵ が小さければレイリー分布から期待される 1.60, 1.27 にそれぞれ漸近的に近づくように見える．$\epsilon\sim0.7$ では

$$\frac{H_{1/3}}{\bar{H}}\fallingdotseq 1.75\ ,\quad \frac{H_{1/10}}{H_{1/3}}\fallingdotseq 1.30$$

の程度である．ϵ が大きいときこれらの比が急速に大きくなるのは，分子に比較して分母のへり方が激しいためで図3からも推察されることである．

最後に，波高の二乗平均 $\bar{H}^2$ と極大値の二乗平均 $\overline{a^2}$ との関係を図6に示す．極大値の分散

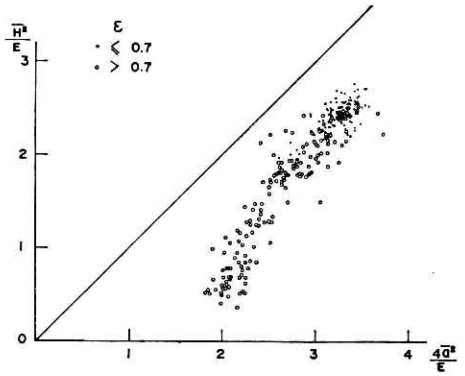


図 6 波高の二乗平均と極大値の二乗平均との関係

は

$$\frac{4\overline{a^2}}{E}=4-2\epsilon^2$$

となるからこの値は2から4の間で変化する．$\overline{H^2}$ は $(2a)^2$ に比較して相当小さい．図4aでは $\overline{H}\sim 2\bar{a}$ であったが二乗することによってその差が拡大されている．

3. おわりに

分散 $E/2$ から波高の推定をする場合はパラメーター ϵ をなんらかの方法で求めておかなければならない．物理的には同じ現象でも，ϵ の値は測定計器の時定数と読取時間間隔とによって異なるからこの値をあらかじめ推定することは困難である．しかし，通常使用する波浪計やデータ処理の方法による ϵ は，うねりを含まない風浪の場合は実際に計算しても，また Williams-Cartwright (1957) が示したように，二，三のスペクトルの経験式から計算しても0.7前後であるから，図3から近似的に

$$\overline{H}\fallingdotseq 0.7\sqrt{\pi}\sqrt{E},\quad H_{1/3}\fallingdotseq 1.6\sqrt{2}\sqrt{E},\quad H_{1/10}\fallingdotseq 3.0\sqrt{E}$$

としてよい．

参考文献

1) Cartwright, D.E. and M.S. Longuet-Higgins (1956): The statistical distribution of the maxima of a random function. *Proc. Roy. Soc. A*, **237**, 212—232.
2) 岩田憲幸・稲田　亘・田中孝紀・渡部　勲 (1970): 波浪のスペクトル幅と統計量（I）．国立防災科学技術センター研究報告，No. 4, 23—43.
3) Rice, S.O. (1954): Mathematical analysis of random noise. In *Noise and Stochastic Processes*, Dover, New York.
4) Williams, A.J. and D.E. Cartwright (1957): A note on the spectra of wind waves. *Trans. Amer. Geophys. Un.*, **38**(6), 864—866.

（1970年4月6日原稿受理）